مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (١) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (1) 2026

# تساوي درجات حرارة عملية Schaefer-Ignaczak الترموديناميكية الدقيقة المتممة لأجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة لجسم مرن دقيق الاستقطاب وغير محدود- صيغ Fourier-Schaefer-Ignaczak

د. منتجب الحسن*

د. منير مخلوف**

خضر الصالح ***

(تاريخ الإيداع ٢٦/١٠/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر٧/١/ ٢٠٢٦)

□ ملخّص □

يتعلق البحث بوصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة [1 ] لجسم ترموديناميكي مرن دقيق الاستقطاب، متجانس ومتماثل المناحي ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة له والمدروس رياضيّاً من خلال الباحثينEringen [2 ] و Nowacki [3] ، والذي يرمز له اختصاراً بالرمز( 2D ( E-N:5. في [4] تم تزويد المسألة السابقة بطريقة تحليلية جديدة، تدعى طريقة Schaefer-Ignaczak.

تم في هذا البحث:

١) إثبات أن عملية Schaefer-Ignaczak الترموديناميكية المتممة للجسم المذكور( 2D ( E-N:5 [3,5 ] غير المجهد خارجياً والذي حرارته الخارجية معدومة، هي عملية متساوية درجات الحرارة.

٢) استنتاج صيغ Fourier- Schaefer-Ignaczak [4 ] الموافقة للجسم ( 2D ( E-N:5، لأجل كل من الجزء التقليدي والجزء الدقيق المتمم لعملية Schaefer-Ignaczak له.

**الكلمات المفتاحية:** تساوي درجات الحرارة ، عملية Schaefer-Ignaczak الترموديناميكية، الحالة المستوية الأولى للانفعالات الدقيقة المرنة، صيغ Fourier.

---

* أستاذ في الرياضيات التطبيقية في قسم الرياضيات – كلية العلوم بجامعة حمص.

** أستاذ في الرياضيات النظرية في قسم الرياضيات – كلية العلوم بجامعة حمص.

*** طالب دكتوراه باختصاص رياضيات تطبيقية في قسم الرياضيات – كلية العلوم بجامعة حمص.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (١) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (1) 2026

# Equal temperatures of the complementary micropolar Schaefer-Ignaczak thermodynamical process in the first plane state of elastic strains of unbounded micropolar body - Fourier-Schaefer-Ignaczak formulas

**Dr.Mountajab Al-Hasan***
**Dr.Mouneer Makhloof****
**Khedr Alsaleh *****

**(Received 26/10/2025.Accepted 7/1/2026)**

**□ABSTRACT □**

This paper concerns the Ignaczak stress-temperature description [1] of the homogenous isotropic 2D micropolar thermodynamical body, in the first plane state of elastic strain, which discussed by Eringen [2] and Nowacki [3]. In [4] we provide this problem with new analytical method called Schaefer-Ignaczak method. In this paper, we do the following:

I. We prove that the complementary micropolar Schaefer-Ignaczak process is an isothermal process for infinite 2D (E-N:5) [3,5], with no stresses and temperature at infinity,

II. then we find the related Fourier-Schaefer-Ignaczak formulas [4] for the classical and complementary micropolar behaviors of a two-dimensional infinite body 2D (E-N:5), which is a micropolar thermodynamical body.

**Key word:** Equal temperatures, Schaefer-Ignaczak thermodynamical processes, first plane state of micropolar elastic stains, Fourier formulas.

*Ph.D. Student in Applied Mathematics, Department of Mathematics ،Faculty of Science – Homs University,

**Professor in Applied Mathematics, Department of Mathematics ،Faculty of Science-Homs University.

*** Professor in Theoretical Mathematics, Department of Mathematics ،Faculty of Science-Homs University.

## 1. مقدمة:

في [6] تم وصف جسم Hooke غير المتجانس وغير متماثل المناحي من خلال مسألة قيم حدية وابتدائية للجسم بواسطة معادلة حركة، تنسورية واحدة، مزودة بعلاقات مناسبة بين الحقول الفيزيائية وبشروط حدية وابتدائية مناسبة بالإجهادات فقط. في [7] تم وصف مسألة القيم الحدية والابتدائية للجسم( E-N:6 ) [2,3] بواسطة معادلتي حركة، تنسوريتين، مزودتين بعلاقات مناسبة بين الحقول الفيزيائية وشروط حدية وابتدائية مناسبة بالإجهادات فقط. في [1] تم تعميم ذلك إلى مسألة قيم حدية وابتدائية للجسم المذكور من خلال ثلاث معادلات، الأولى والثانية تنسوريتين والثالثة سلمية، علماً أن هذه المعادلات الثلاث مزودة بشروط حدية وابتدائية مناسبة بالحرارة والاجهادات فقط، ومزودة أيضا بعلاقات أخرى مناسبة ما بين الحقول الفيزيائية. في [4] تم تزويد مسألة القيم الحدية والابتدائية للجسم المذكورة ضمن حالته المستوية الأولى للانفعالات الدقيقة المرنة، بطريقة تحليلية جديدة تدعى طريقة Schaefer-Ignaczak ، وهي طريقة تسهل إيجاد الحل التحليلي للمسألة.

## 2. هدف البحث وأهميته:

– يهدف البحث إلى إثبات تساوي درجات حرارة عملية Schaefer- Ignaczak الترموديناميكية الدقيقة المتممة للجسم غير المحدود ( 2D( E-N:5 وغير المجهد خارجياً والذي حرارته الخارجية أيضا معدومة. بعدها، وباستخدام نظرية التحويلات التكاملية سنستنتج صيغ Fourier-Schaefer−Ignaczak التقليدية والدقيقة المتممة للجسم المدروس ( 2D ( E-N:5.

– يمكن أن تملك نتائج هذا البحث تطبيقات عملية هامة في نظرية الصفائح وميكانيك المواد.

## 3. طرائق البحث وأدواته:

في البحث سنعتمد طريقة تمثل دمجاً لطريقة التحويلات التكاملية مع طريقة Schaefer- Ignaczak [4].

## 4. النتائج والمناقشة:

من أجل متطلبات البحث نعرض وباختصار ما يلزم من نتائج البحث[4] ، حول طريقة Schaefer-Ignaczak لأجل الجسم المرن دقيق الاستقطاب المعتبر( 2D ( E-N:5 والذي يشغل الحالة البدئية $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$، إذ تم كتابة العملية الترموديناميكية دقيقة الاستقطاب الحاكمة للجسم في $\Omega \times T$ (حيث: $T = [0,\infty[$ )، بالشكل:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}' ,\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}' ,\ \theta = \theta^0 + \theta' ,\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}' ,\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}' ,\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}' , \\ \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}' ,\ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}' ,\end{gathered} \tag{4.1}$$

حيث تتعلق المقاطع التنسورية: $(\mathbf{u}^0 ,\ \boldsymbol{\varphi}^0 ,\ \theta^0 ,\ \boldsymbol{\sigma}^0 ,\ \boldsymbol{\mu}^0 ,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 ,\ \boldsymbol{\kappa}^0)$ و $\mathbf{Y}^0$ بجسم Hoke الترموديناميكي والتقليدي المرن ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالاته المرنة، كما أن $(\mathbf{u}' ,\ \boldsymbol{\varphi}' ,\ \theta' ,\ \boldsymbol{\sigma}' ,\ \boldsymbol{\mu}' ,\ \boldsymbol{\gamma}' ,\boldsymbol{\kappa}')$، $\mathbf{Y}'$ تمثل الحقول الدقيقة المتممة، و $\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0$ مقطعان متجهيان، يرمزان على الترتيب، لمقطي الإزاحة، التقليدي، والدوران، التقليدي، وهما مرتبطان بالعلاقة [5]:

$$\boldsymbol{\varphi}^0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}^0 \tag{٤.٢}$$

حيث الرمز **curl** يرمز إلى مؤثر الدوران، و $\boldsymbol{\sigma}^0 ,\ \boldsymbol{\mu}^0 ,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 ,\ \boldsymbol{\kappa}^0$، هي مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، وتمثل على الترتيب؛ مقطع إجهادات القوة، التقليدي، المتناظر، ومقطع إجهادات العزم، التقليدي، غير المتناظر ومقطع

انفعالات القوة، التقليدي، المتناظر، ومقطع انفعالات العزم، التقليدي، غير المتناظر. كما أن الرمز $\theta^0$ يرمز للحقل الحراري التقليدي. الرمزان $\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}'$، يمثلان مقطعين متجهيين مستقلين، هما على الترتيب، مقطعي الإزاحة الدوران، الدقيقين المتممين. ترمز $\boldsymbol{\sigma}'\,,\boldsymbol{\mu}'\,,\boldsymbol{\gamma}'\,,\boldsymbol{\kappa}'$ هي لمقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، وغير متناظرة؛ وتمثل على الترتيب: مقطع إجهادات القوة، الدقيق، المتمم، ومقطع إجهادات العزم، الدقيق، المتمم، ومقطع انفعالات القوة، الدقيق، المتمم، ومقطع انفعالات العزم، الدقيق، المتمم، كما يمثل الرمز $\theta'$ الحقل الحراري الدقيق المتمم. وإذا رمزنا بـ $]\,0\,,\infty\,[\; =: \mathrm{T}^+$ و بـ $[\,0\,,\infty\,[\; =: \mathrm{T}$، فيمكن أن تمثل المقاطع التنسورية السابقة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي العطالي، المعتبر $\mathbf{e}_i$، على الشكل التالي:

$$\mathbf{u}^0\equiv(u_1^0\,,u_2^0\,,0)\ ,\ \boldsymbol{\varphi}^0\equiv(\,0\,,\ 0\ ,\varphi_3^0)\ ,\ \varphi_3^0=\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}u^0_{\beta,\alpha}\ , \tag{٤.٣}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0\equiv\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}^0 & \varepsilon_{12}^0 & 0\\ \varepsilon_{21}^0 & \varepsilon_{22}^0 & 0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\kappa}^0\equiv\begin{bmatrix}0&0&\kappa_{13}^0\\ 0&0&\kappa_{23}^0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\ , \tag{4٤.}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & 0\\ \sigma_{21}^0 & \sigma_{22}^0 & 0\\ 0&0&\sigma_{33}^0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\mu}^0\equiv\begin{bmatrix}0&0&\mu_{13}^0\\ 0&0&\mu_{23}^0\\ \mu_{31}^0&\mu_{32}^0&0\end{bmatrix}\ , \tag{4.5}$$

حيث: $\sigma_{33}^0=\nu\,\sigma_{\alpha\alpha}^0-\dfrac{\mu}{\mu+\lambda}\,\nu_T\,\theta^0\ ,\ \mu_{3\alpha}^0=\dfrac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha3}^0$ ، كما أن:

$$\mathbf{u}'\equiv(u_1'\,,u_2'\,,0)\ ,\ \ \boldsymbol{\varphi}'\equiv(\,0\,,\ 0\ ,\varphi_3')\ , \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\gamma}'\equiv\begin{bmatrix}\gamma_{11}' & \gamma_{12}' & 0\\ \gamma_{21}' & \gamma_{22}' & 0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\kappa}'\equiv\begin{bmatrix}0&0&\kappa_{13}'\\ 0&0&\kappa_{23}'\\ 0&0&0\end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11}' & \sigma_{12}' & 0\\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & 0\\ 0&0&\sigma_{33}'\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\mu}'\equiv\begin{bmatrix}0&0&\mu_{13}'\\ 0&0&\mu_{23}'\\ \mu_{31}'&\mu_{32}'&0\end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

حيث: $\sigma_{33}'=\nu\,\sigma_{\alpha\alpha}'-\dfrac{\mu}{\mu+\lambda}\,\nu_T\,\theta'\ ,\ \mu_{3\alpha}'=\dfrac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha3}'$

وهنا نشير إلى أن المصفوفتين الممثلتين لـ $\boldsymbol{\varepsilon}^0$، $\boldsymbol{\sigma}^0$ متناظرتان، أما المصفوفات: $\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}'$ و $\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}'$ فهي غير متناظرة، كما أن: $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ تمثل نسبة Poisson، و $\nu_T=(3\lambda+2\mu)\,a_t$، و $a_t$ هو معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و $\mu,\lambda,\gamma,\varepsilon\in R_+$ الثوابت المادية للجسم المدروس، كما ننوه هنا إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x}\equiv(x_1,x_2)\in\Omega$ وللزمن $t$. الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية في النظام الديكارتي المعتبر لتنسور Levi-Chevita النسبي من المرتبة الثانية

[8]، الفاصلة الدليلية تعني الاشتقاق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع, $f_{,\alpha}=\dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ ، وهنا أيضاً ننوه إلى أننا نستخدم رموز Einstein حيث الأدلة الإغريقية ... $\alpha,\beta,\gamma,$ تأخذ القيمتين $1,2$.

*تعريف .4.1:*

ندعو $(\mathbf{u}^0\ ,\ \boldsymbol{\varphi}^0\ ,\ \theta^0,\ \boldsymbol{\sigma}^0\ ,\ \boldsymbol{\mu}^0\ ,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0\ ,\ \boldsymbol{\kappa}^0)$ بعملية Schaefer-Ignaczak التقليدية، كما ندعو $(\mathbf{u}'\ ,\boldsymbol{\varphi}'\ ,\ \theta',\ \boldsymbol{\sigma}'\ ,\boldsymbol{\mu}'\ ,\boldsymbol{\gamma}'\ ,\boldsymbol{\kappa}')$ بعملية Schaefer-Ignaczak الدقيقة المتممة للجسم المعتبر 2D( E-N:5).

*٤–أ) مسألة Schaefer-Ignaczak التقليدية ، للقيم الحدية والابتدائية تتألف ممايلي:*

– *معادلات Schaefer- Ignaczak التقليدية، للحركة والمحققة في* $\Omega\ \times\ \mathrm{T}^+$:

$$\hat{c}_2^2(R^0_{\alpha,\beta}+R^0_{\beta,\alpha})-\ddot{\sigma}^0_{\alpha\beta}+(\lambda\ddot{e}^0_1-\nu_T\ddot{\theta}^0)\delta_{\alpha\beta}=0\ , \qquad (4.9)$$

$$\theta^0_{,\alpha\alpha}-\frac{1}{\kappa}\,\dot{\theta}^0\ -\ \eta_0\,\dot{e}^0_1=-\frac{Q}{\kappa}\ , \qquad (4.10)$$

حيث:

$$R^0_\alpha=\hat{R}^0_\alpha+X_\alpha\ \ ,\ \ \hat{R}^0_\alpha=\sigma^0_{\beta\alpha,\beta}$$

ثم أن $\hat{c}_2^2=\dfrac{\mu}{\rho}$ ، $\ddot{e}^0_1=\dfrac{1}{2(\mu+\lambda)}(\ddot{\sigma}^0_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_T\,\ddot{\theta}^0)$ ، $\dot{e}^0_1=\dfrac{1}{2(\mu+\lambda)}(\dot{\sigma}^0_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_T\,\dot{\theta}^0)$ وهنا $\rho$ تمثل الكثافة الحجمية للجسم المعتبر، $\mathbf{X}\equiv(X_1\ ,X_2\ ,0)$ تمثل مقطع الفوة الحجمية، المتجهي، المعطى في الجسم، $\mathbf{Y}\equiv(0\ ,0\ ,Y_3)$ تمثل مقطع العزم الحجمي، المتجهي، المعطى في الجسم، $Q$ مقطع المصادر الحرارية، السلمي، المعطى في لجسم. أيضاً: $\eta_0=\dfrac{\nu_T T_0}{\lambda_0}$ يمثل المعامل الميكانيكي الحراري للجسم، حيث $\nu_T=(2\mu+3\lambda)a_t$ و $\lambda_0$ معامل التوصيل الحراري له، كما أن $a_t$ يمثل معامل التمدد الحراري، الخطي للجسم المعتبر، أيضاً: $\kappa=\dfrac{\lambda_0}{c_\gamma}$ و $Q(\mathbf{x},t)=\dfrac{\kappa W(\mathbf{x},t)}{\lambda_0}$ ، علماً أن و $c_\gamma$ تمثل الحرارة النوعية للجسم من ضمن تشوه ثابت له و $W(\mathbf{x},t)$ تمثل كمية الحرارة المشكلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، أما $Q(\mathbf{x},t)$ فهو يصف تأثير المصادر الحرارية في الجسم المعتبر، وهي مقطع سلمي، معطى. كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial t}\equiv\partial_t f$ .

– *الشروط الحدية المحققة على* $\partial\Omega\ \times\ \mathrm{T}$:

$$\sigma^0_{\beta\alpha}n_\beta=p_\alpha\ \ ,\ \ \theta^0=\vartheta \qquad (4١.1)$$

حيث $n_\beta$ تمثل المركبات الديكارتية لمتجه واحدة الناظم $\mathbf{n}\equiv(n_1,n_2,0)$ على $\partial\Omega$ والموجه نحو خارج $\partial\Omega$ ، كما أن $p_\alpha$ و $\vartheta$ هي توابع حقيقية مفروضة وهي تمثل على الترتيب المركبات الديكارتية لمتجه قوة الجر، الكلي، والحمل الحراري الكلي على حدود الجسم.

– *الشروط الابتدائية المحققة في* $\Omega\times\{0\}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^0=\mathbf{sym}\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\ ,\quad \theta^0=\ell\ ,\ \ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0=\mathbf{sym}\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} \qquad (4.1٢)$$

حيث الرمز **sym** يمثل الجزء التناظري للحقل التنسوري والرموز: $\ell$ , $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ , $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ على الترتيب تمثل القيمة الابتدائية المفروضة لحقل انفعالات القوة، الكلي والقيمة الابتدائية المفروضة لسرعته، والقيمة الابتدائية المفروضة لحقل درجات الحرارة، الكلي [1,2].

– *العلاقات التأسيسية العكسية، المحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$2\mu\, \varepsilon^0_{\alpha\beta} = \sigma^0_{\alpha\beta} - (\lambda\, e^0_1 - \nu_T\, \theta^0)\, \delta_{\alpha\beta} \tag{4.13}$$

حيث

$$e^0_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma^0_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\, \theta^0)$$

– *علاقات الطي (Convolution Relations)، المحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}$ :

$$u^0_\alpha = g_\alpha\, t + f_\alpha + \rho^{-1}(t * R^0_\alpha)\ , \tag{4.14}$$

$$\varphi^0_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} [g_\beta\, t + f_\beta + \rho^{-1}(t * R^0_\beta)]_{,\alpha} \tag{4.15}$$

مع العلم أن $f_\alpha$ يمثل القيم الابتدائية للإزاحات، الكلية $u_\alpha$ و $g_\alpha$ القيم الابتدائية لسرعتها، كما أن رمز النجمة يعني الطي بالنسبة للزمن [8]: $t * f(\mathbf{x},t) = \int_0^t (t-\tau)\, f(\mathbf{x},\tau)\, d\tau$ .

*٤–ب) مسألة Schaefer-Ignaczak الدقيقة، المتممة للقيم الحدية والابتدائية، تتألف ممايلي:*

– *معادلات Schaefer-Ignaczak ، الدقيقة، المتممة للحركة المحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\Box}_2\, \rho^{-1} R'_{\alpha,\beta} + J^{-1} \in_{\alpha\beta} \Re'_3 - \overset{*}{\Box}_2 \{ \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\beta\alpha)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\beta\alpha]} - \frac{1}{2\mu}(\lambda\, \ddot{e}'_1 - \nu_T\, \ddot{\theta}')\, \delta_{\alpha\beta} \} = 0\ , \tag{4.16}$$

$$c^2_4\, \Re'_{3,\alpha} - \overset{*}{\Box}_2\, \ddot{\mu}'_{\alpha 3} = 0\ , \tag{4.17}$$

$$\mathrm{D}\,\theta' - \eta_0\, \dot{e}'_1 = -\frac{\hat{Q}}{\kappa}\ , \tag{4.18}$$

حيث:

$$R'_\alpha = \hat{R}'_\alpha + \hat{X}_\alpha\ ,\ \hat{R}'_\alpha = \sigma'_{\beta\alpha,\beta}\ ,\ \hat{X}_\alpha \equiv 0\ ,$$

$$\Re'_3 = \hat{\Re}'_3 + \hat{Y}_3\ ,\ \hat{\Re}'_3 = \overset{*}{\Box}_2\, \hat{R}'_3\ ,\ \hat{R}'_3 = \in_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta} + \mu'_{\beta 3,\beta}\ ,$$

$$\hat{Y}_3 = \overset{*}{\Box}_2\, Y_3 - \frac{1}{2}\, \overset{*}{\Box}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}\ ,\quad \hat{Q} = 0\ ,$$

$$\dot{e}'_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\dot{\sigma}'_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\, \dot{\theta}')\ ,\ \ddot{e}'_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\ddot{\sigma}'_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\, \ddot{\theta}')\ ,$$

و
$$\overset{*}{\square}_4 = (\gamma+\varepsilon)\,\Delta_1 - J\partial_t^2 \ , \quad \overset{*}{\square}_2 = \mu\Delta_1 - \rho\,\partial_t^2 \ ,$$

$$c_4^2 = \frac{\gamma+\varepsilon}{J}\,, \ \ \mathrm{D} = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa}\,\partial_t \ , \ \ \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,, \quad \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$$

- *الشروط الحدية المتممة المحققة على* $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma'_{\beta\,\alpha} n_\beta = 0 \ , \ \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \ , \ \theta' = 0 \tag{4.19}$$

حيث: $m_3^0 = \mu_{\alpha 3}^0 n_\alpha$ والتي فيها $\mu_{\alpha 3}^0$ تنتج عن العلاقات التقليدية:

$$\kappa_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} \in_{\gamma\,\varepsilon} [g_\varepsilon\ t + f_\varepsilon + \rho^{-1}(\,t * R_\varepsilon^0\,)]_{,\alpha\,\gamma} \tag{4.20}$$

$$\kappa_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha 3}^0 \ , \tag{4.21}$$

– *الشروط الابتدائية الدقيقة، المتممة، والمحققة في* $\Omega \times \{0\}$ *لأجل* $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \theta')$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{skew}\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \ , \quad \boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{0\,(0)} \ , \ \theta' = 0 \ , \\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{skew}\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} \ , \quad \dot{\boldsymbol{\mu}}' = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^{0\,(0)} \ , \end{aligned} \tag{4.22}$$

يدل الرمز **skew** يمثل الجزء التناظري العكسي للحقل التنسوري، كما أن: $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ و $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ و $\boldsymbol{\mu}^{0\,(0)}$ و $\dot{\boldsymbol{\mu}}^{0\,(0)}$ تمثل على الترتيب القيم الابتدائية المفروضة لحقل إجهادات القوة التنسوري، الكلي، ولسرعة هذا الحقل، والقيمة الابتدائية المفروضة لحقل إجهادات العزم، التقليدي، ولسرعته [1,4].

– *العلاقات التأسيسية العكسية، الدقيقة، المتممة والمحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\gamma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(\alpha\,\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\alpha\,\beta]} - \frac{1}{2\mu}(\,\lambda\, e'_1 \ - \nu_T\,\theta'\,)\,\delta_{\alpha\,\beta} \ , \\ &\kappa'_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu'_{\alpha 3} \ , \quad e'_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma'_{\varepsilon\,\varepsilon} + 2\nu_T\,\theta') \ , \end{aligned} \tag{4.23}$$

– علاقات الطي، الدقيقة، المتممة والمحققة في $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$:

$$u'_\alpha = \rho^{-1}(\,t * R'_\alpha\,) \ ,$$

$$\begin{aligned} \varphi'_3 &= (g_3 - \frac{1}{2} \in_{\alpha\,\beta}\, g_{\beta,\alpha}) + (f_3 - \frac{1}{2} \in_{\alpha\,\beta}\, f_{\beta,\alpha}) + \\ &+ J^{-1}[\,t * (\hat{R}'_3 + Y_3)] + J^{-1}(\,t * \hat{R}_3^0) \ - \frac{1}{2} \in_{\alpha\,\beta}\, \rho^{-1}(\,t * R_{\beta,\alpha}^0) \end{aligned} \tag{٤.٢٤}$$

تحتاج متطلبات الفقرة القادمة لإعادة كتابة المعادلات التكاملية–التفاضلية، الموافقة لجملة المعادلتين (4.9)–(4.10)، والتي تأخذ في $\Omega \times \mathrm{T}$ الشكل التالي [1,4]:

$$\hat{c}_2^2(t*R^0_{\alpha,\beta}+t*R^0_{\beta,\alpha})-\sigma^0_{\alpha\beta}+(\lambda e^0_1-\nu_T\theta^0)\delta_{\alpha\beta}=$$
$$=-\mu\,[\,(g_{\alpha,\beta}+g_{\beta,\alpha})\,t+(\,f_{\alpha,\beta}+f_{\beta,\alpha})\,]\ ,$$
$$\int_0^t \theta^0_{,\alpha\alpha}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau-\frac{1}{\kappa}\theta^0(\mathbf{x},t)-\eta_0\,e^0_1(\mathbf{x},t)\ = \qquad (٤.٢٥)$$
$$=\ -\frac{1}{\kappa}\,\ell\,(\mathbf{x})-\eta_0\,f_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{x})-\frac{1}{\kappa}\int_0^t Q\,(\mathbf{x},\tau)\,d\tau\ \ ,$$

حيث: $e^0_1=\dfrac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma^{\,0}_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_T\,\theta^0)$

كما يلزم متطلبات الفقرة القادمة استنتاج جملة المعادلات التكاملية–التفاضلية، الدقيقة، المتممة والمتعلقة بمعادلات Schaefer-Ignaczak التفاضلية، الدقيقة، المتممة، التالية، المأخوذة من المقالة [4]، والمحققة في $\Omega\times T^+$، والمزودة بالشروط الابتدائية (٤.٢٢):

$$\frac{1}{2}\rho^{-1}\left(R'_{\alpha,\beta}+R'_{\beta,\alpha}\right)-\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\alpha\,\beta)}+\frac{1}{2\mu}\left(\lambda\,\ddot{e}'_1-\nu_T\ddot{\theta}'\right)\delta_{\alpha\,\beta}+\frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\alpha\,\beta]}+$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{-1}\left(R^0{}_{\alpha,\beta}+R^0{}_{\beta,\alpha}\right)+J^{-1}\in_{\alpha\,\beta}\left(\hat{R}'_3+Y_3\right)=0\quad , \qquad (4.26)$$
$$\mathrm{D}\,\theta'\ -\ \eta_0\,\dot{e}'_1=-\frac{\hat{Q}}{\kappa}\ ,$$
$$c_4^2\left(\hat{R}'_3+Y_3\right)_{,\alpha}-\ddot{\mu}'_{\alpha\,3}=-c_4^2\hat{R}^0_{3,\alpha}+\ddot{\mu}^0_{\alpha\,3}\ , \qquad (4٢٧.)$$

حيث: $\hat{R}'_3=\in_{\alpha\,\beta}\,\sigma'_{\alpha\,\beta}+\mu'_{\beta\,3,\beta}\quad,\quad \hat{R}^0_3=\mu^0_{\beta\,3,\,\beta}$

حيث تم هذا الاستنتاج انطلاقاً من المعادلات (4.27)–(4.26) ومن الشروط الابتدائية (4.2٢)، باتباع مايلي.

بتطبيق مؤثر الطي على طرفي المعادلة الأولى في (4.26) وطرفي المعادلة (4٢٧.)، وبمكاملة طرفي المعادلة الثانية في (4.26) على المجال $[0\,,t]$، واستخدام الشروط الابتدائية، الدقيقة، المتممة (4.2٢)، نحصل على جملة معادلات Schaefer-Ignaczak التكاملية- التفاضلية، الدقيقة، المتممة، التالية والمحققة في $\Omega\times T$:

(4٢٨.)

$$\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R'_{\alpha,\beta}+R'_{\beta,\alpha}\right)-\frac{1}{2\mu}\sigma'_{(\alpha\,\beta)}+\frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\alpha\,\beta]}+\frac{1}{2\mu}\left(\lambda e'_1-\nu_T\theta'\right)\delta_{\alpha\,\beta}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big[t\left(g_{\beta,\alpha}-g_{\alpha,\beta}\right)+\left(f_{\beta,\alpha}-f_{\alpha,\beta}\right)\Big]+\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R^0{}_{\alpha,\beta}-R^0{}_{\beta,\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R'_{\alpha,\beta}-R'_{\beta,\alpha}\right)+J^{-1}t*\in_{\alpha\,\beta}\left(\hat{R}'_3+Y_3\right)=0\,,$$
$$\int_0^t\theta'_{,\alpha\alpha}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau-\frac{1}{\kappa}\theta'(\mathbf{x},t)-\eta_0\,e'_1(\mathbf{x},t)\ =-\frac{1}{\kappa}\int_0^t\hat{Q}\,(\mathbf{x},\tau)\,d\tau\quad ,$$
$$t*c_4^2\left(\hat{R}'_3+Y_3\right)_{,\alpha}-\mu'_{\alpha\,3}=-\,t*c_4^2\hat{R}^0_{3,\alpha}+\mu^0_{\alpha\,3}-\left(\gamma+\varepsilon\right).\left(g_3t+t_3\right)_{,\alpha}\,,$$

*٤-ج) فصل معادلات Schaefer- Ignaczak التقليدية للحركة في* $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

يلزمنا لهذا الغرض استنتاج المعادلات المستقلة من أجل الكميات $e^0, \theta^0, \rho^{-1}(t * R_\alpha^0) + g_\alpha t + f_\alpha$، باتباع مايلي. نأخذ تقلص طرفي المعادلة الأولى في (٤.٢٥) على الدليلين $\alpha, \beta$ ، نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\rho^{-1}\left(t * R_{\beta,\beta}^0\right) + g_{\beta,\beta}\, t + f_{\beta,\beta} = e_1^0 \qquad (4.29)$$

واشتقاق طرفي المعادلة الأولى من (٤.٢٥) جزئياً بالنسبة لـ $x_\beta$ نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\hat{c}_2^2(t * R_{\alpha,\beta\beta}^0 + t * R_{\beta,\alpha\beta}^0) - \sigma_{\alpha\beta,\beta}^0 + (\lambda e_1^0 - \nu_T \theta^0)_{,\beta} = \\ &= -\mu\,[\,(g_{\alpha,\beta\beta} + g_{\beta,\alpha\beta})\, t + (f_{\alpha,\beta\beta} + f_{\beta,\alpha\beta})\,]\ , \end{aligned} \qquad (4.30)$$

حيث استخدمنا هنا العلاقة التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$-R_\alpha^0 = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[t * \left(\rho^{-1} R_\alpha^0\right) + g_\alpha t + f_\alpha\right]\ ,$$

إن المعادلات (4.30) تكتب بلغة المؤثرات التفاضلية، بالشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\square}_2\left(\rho^{-1} t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha\right) + \\ &+\left[\mu\left(\rho^{-1} t * R_{\beta,\beta}^0 + g_{\beta,\beta}\, t + f_{\beta,\beta}\right) + \lambda e_1^0 - \nu_T \theta^0\right]_{,\alpha} + X_\alpha = 0\,, \end{aligned} \qquad (4.31)$$

باستخدام (4.29) تأخذ (4.31) الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\rho^{-1} t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha\right] + \left[(\mu + \lambda)\, e_1^0 - \nu_T \theta^0\right]_{,\alpha} + X_\alpha = 0 \qquad (4.32)$$

أو الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\rho^{-1} t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha\right] + (\mu + \lambda)\, e_{1,\alpha}^0 - \nu_T \theta_{,\alpha}^0 + X_\alpha = 0 \qquad (4.33)$$

وبأخذ المشتق الجزئي لطرفي المعادلة (٤.٣٢) بالنسبة لـ $x_\alpha$ نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\overset{*}{\square}_2\left[\rho^{-1} t * R_{\alpha,\alpha}^0 + g_{\alpha,\alpha} t + f_{\alpha,\alpha}\right] + (\mu + \lambda)\, e_{1,\alpha\alpha}^0 - \nu_T\, \theta_{,\alpha\alpha}^0 + X_{\alpha,\alpha} = 0 \qquad (4٣٤.)$$

أو:

$$\overset{*}{\square}_2\, e_1^0 + (\mu + \lambda)\, \Delta_1 e_1^0 - \nu_T\, \Delta_1 \theta^0 + X_{\alpha,\alpha} = 0$$

أو الشكل النهائي التالي المحقق في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\square_1 e_1^0 - \nu_T \Delta_1 \theta^0 + X_{\alpha,\alpha} = 0\,, \qquad (4٣٥.)$$

حيث:

$$\square_1\, e_1^0 = (\lambda + 2\mu)\, \Delta_1 e_1^0 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_1^0$$

بأخذ المشتق الجزئي الزمني لطرفي المعادلة الثانية من (٤.٢٥) نحصل على المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\Delta_1\theta^0 - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\theta^0 - \eta_0\frac{\partial}{\partial t}e_1^0 = -\frac{1}{\kappa}Q\,, \tag{4.36}$$

أو:

$$D\theta^0 - \eta_0 \dot{e}_1^0 - = -\frac{1}{\kappa}Q\,, \tag{4.37}$$

حيث: $D\theta^0 = \Delta_1\theta^0 - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\theta^0$ .

الآن بتطبيق المؤثر $D$ على طرفي المعادلة (٤٣٥.) ومن ثم باستخدام (4.37) نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$D_2 e_1^0 = -\left(D X_{\alpha,\alpha} + \frac{\nu_T}{\kappa}\Delta_1 Q\right), \tag{4٣٨.}$$

حيث: $D_2 = D\square_1 - \nu_T\eta_0\Delta_1\partial_t$ .

من جهة أخرى بتطبيق المؤثر $\square_1$ على طرفي (4.37) وباستخدام المعادلة (٤٣٥.) نصل إلى المعادلة المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$D_2\theta^0 = -\left(\eta_0\partial_t X_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{\kappa}\square_1 Q\right), \tag{4٣٩.}$$

أخيراً نحصل على المعادلة المستقلة الأخيرة من أجل الكمية $\rho^{-1}t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha$ وذلك بتطبيق المؤثر $D_2$ على طرفي المعادلة (4.33) ، ثم نستخدم المعادلتين المستقلتين (4.38) و(4.39) ، فنحصل على المعادلة المستقلة الآتية، المحققة $\Omega \times T$:

(4.40)

$$D_2\overset{*}{\square}_2\left(\rho^{-1}t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha\right) = -D_2 X_\alpha + \left[(\mu+\lambda)D - \nu_T\eta_0\partial_t\right]X_{\beta,\beta\alpha} + \\ + \frac{\nu_T}{\kappa}\left[(\mu+\lambda)\Delta_1 - \square_1\right]Q_{,\alpha}$$

أو:

(4.41)

$$D_2\overset{*}{\square}_2\left(\rho^{-1}t * R_\alpha^0 + g_\alpha t + f_\alpha\right) = -D_2 X_\alpha + D_1 X_{\gamma,\gamma\alpha} - \frac{\nu_T}{\kappa}\overset{*}{\square}_2 Q_{,\alpha}\,,$$

حيث: $D_1 = (\mu+\lambda)D - \nu_T\eta_0\partial_t$ .

في النهاية، لنعيد كتابة المعادلة الأولى في (٤.٢٥) ، وفق الشكل:

$$\mu\left\{\left[\rho^{-1}\left(t*R_{\alpha}^{0}\right)+g_{\alpha}t+f_{\alpha}\right]_{,\beta}+\left[\rho^{-1}\left(t*R_{\beta}^{0}\right)+g_{\beta}t+f_{\beta}\right]_{,\alpha}\right\} - \sigma_{\alpha\beta}^{0}+\left(\lambda e_{1}^{0}-\nu_{T}\theta^{0}\right)\delta_{\alpha\beta}=0 \qquad (4.42)$$

بتطبيق المؤثر $D_2 \overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (4.42) واستخدام المعادلات (4.41) و(٤٣٨.) و(4.39)، نصل إلى المعادلة المستقلة التالية لأجل $\sigma_{\alpha\beta}^{0}$، والمحققة في $\Omega \times T^{+}$:

(4.43)

$$D_2 \overset{*}{\square}_2 \sigma_{\alpha\beta}^{0} = -\mu D_2\left(X_{\alpha,\beta}+X_{\beta,\alpha}\right)+2\mu D_1 X_{\gamma,\gamma\alpha\beta}-2\mu\frac{\nu_T}{\kappa}\overset{*}{\square}_2 Q_{,\alpha\beta}+ + \overset{*}{\square}_2\left\{\left(\mu D-D_1\right)X_{\gamma,\gamma}+\frac{\nu_T}{\kappa}\left(\square_1-\lambda\Delta_1\right)Q\right\}\delta_{\alpha\beta}$$

*٤- د) تساوي درجات حرارة عملية Schaefer-Ignaczak الدقيقة المتممة في الجسم غير المحدود (E-N:5 2D ) الذي إجهاداته الدقيقة المتممة، الخارجية وحرارته الدقيقة المتممة الخارجية، جميعها معدومة:*

باستخدام طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في الفقرة السابقة نحصل من جملة المعادلات التكاملية–التفاضلية، الدقيقة، المتممة (٤٢٨.) ، على المعادلات المستقلة التالية لأجل كل من $e_1', \theta'$ ، والمحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$D_2 e_1' = -\left(D\hat{X}_{\alpha,\alpha}+\frac{\nu_T}{\kappa}\Delta_1\hat{Q}\right), \qquad (4.44)$$

$$D_2\theta' = -\left(\frac{1}{\kappa}\square_1\hat{Q}+\eta_0\,\partial_t X_{\alpha,\alpha}\right) \qquad (4.45)$$

بما أن: $\hat{X}_{\alpha}=0\ ,\ \hat{Q}=0$ ، فتأخذ المعادلات المستقلة السابقة الشكل التالي في $\Omega \times T^{+}$:

$$D_2\theta' = 0\ ,\ D_2 e_1' = 0 \qquad (4.46)$$

***مبرهنة 4.1:***

إن عملية Schaefer-Ignaczak الدقيقة المتممة لأجل الجسم غير المحدود ( E-N:5 ) 2D الذي يشغل $\mathbb{R}^2$ والذي إجهاداته الدقيقة المتممة الخارجية وحرارته الدقيقة المتممة الخارجية معدومة، هي عملية متساوية درجات الحرارة الدقيقة المتممة.

*الإثبات:*

بتطبيق مؤثر Fourier التكاملي المباشر من المرتبة الثانية بالنسبة للموضع $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2\right)$ وللزمن $t$ [8] على طرفي كل من المعادلتين (4.46)، من ثم باستخدام خواص هذا المؤثر، نحصل على المعادلات المحولة التالية:

$$-\ (\lambda+2\mu)\,W_4(\xi,\tau)\,\overline{\theta}'(\xi,\tau)=0\ , \qquad (4.47)$$

$$-\ (\lambda+2\mu)\,W_4(\xi,\tau)\,\overline{e}_1'(\xi,\tau)=0\ , \qquad (4.48)$$

حيث تمثل الدالة

(4.49)

$$\boldsymbol{F}_3[\,f(\mathbf{x},t)\,] \;=\; \bar{f}(\xi,\tau) := \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},t)\, e^{\,i(\mathbf{x}\cdot\xi+\tau t)}\, d\mathbf{x}\, dt$$

تحويل Fourier التكاملي، المباشر، المضاعف من المرتبة الثالثة للدالة $f(\mathbf{x},t)$ بالنسبة للموضع $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ وللزمن $t$ ، كما أن:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2)\,,\, \mathbf{x} = (x_1,x_2)\,,\, \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_\alpha\,\xi_\alpha\,,\, d\mathbf{x} = dx_1\,dx_2\,,\; i \;=\; \sqrt{-1}$$

و:

$$W_4(\xi,\tau) = \xi^4 - [\sigma_1^2(\tau) + (1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q(\tau)]\,\xi^2 + q(\tau)\,\sigma_1^2(\tau)$$

ثم إن:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\;,\quad \sigma_1(\tau) \;=\; \frac{\tau}{c_1}\;,\qquad \xi \;=\; (\xi_\alpha\,\xi_\alpha)^{\frac{1}{2}}\;,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = m\,\kappa\,\eta_0\;,\quad m \;=\; \frac{\nu_T}{\lambda+2\mu}\;,\; q(\tau) \;=\; \frac{i\,\tau}{\kappa}$$

تأخذ المعادلتان (4.48) و(4.47) الشكل التالي:

$$\bar{\theta}'(\xi,\tau) \;=\; 0\;\;,\; \bar{e}_1'(\xi,\tau) \;=\; 0 \qquad (4.50)$$

لنعتبر الآن مؤثر Fourier التكاملي العكسي، المضاعف من المرتبة الثالثة بالنسبة للوسيط $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ والوسيط $\tau$ [8] ، المتمثل بالعلاقة:

(4.51)

$$\boldsymbol{F}_3^{-1}[\,\bar{f}(\xi,\tau)\,] \;=\; f(\mathbf{x},t) := \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi,\tau)\, e^{\,-i(\mathbf{x}\cdot\xi+\tau t)}\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau$$

حيث: $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_1\,d\xi_2$. بتطبيق المؤثر العكسي $\boldsymbol{F}_3^{-1}$ على طرفي كل من المعادلتين (4.50)، نحصل مباشرةً على المتطابقتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times \mathrm{T}^+$ (حيث: $\Omega = \mathbb{R}^2$):

$$\theta'(\mathbf{x},t) = 0\,,\quad e'(\mathbf{x},t) = 0 \qquad (4.52)$$

نحصل من المتطابقتين السابقتين على النتيجة المتمثلة بأن عملية Schaefer-Ignaczak الدقيقة، المتممة، هي عملية متساوية درجات الحرارة الدقيقة المتممة، كما أن التمدد السطحي الدقيق المتمم يكون معدوماً؛ بالتالي مساحة السطح الدقيق المتمم ثابتة.

*٤-هـ) معادلات Schaefer-Ignaczak الدقيقة، المتممة، المستقلة لأجل الجسم غير المحدد المعتبر ( E-N:5 ) 2D:*

باستخدام طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في الفقرة (٤-أ)، ننطلق من معادلات Schaefer-Ignaczak التكاملية – التفاضلية، الدقيقة المتممة (٤٢٨.)، التي تأخذ الشكل التالي في $\Omega\times\mathrm{T}\;(\Omega=\mathbb{R}^2)$، لأجل الجسم غير المحدود ( E-N:5 ) 2D، المتمتع بإجهادات وحرارة، خارجية، جميعها معدومة:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R'_{\alpha,\beta}+R'_{\beta,\alpha}\right)-\frac{1}{2\mu}\sigma'_{(\alpha\,\beta)}+\frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\alpha\,\beta]}+\\
&+\frac{1}{2}\left[t\left(g_{\beta,\alpha}-g_{\alpha,\beta}\right)+\left(f_{\beta,\alpha}-f_{\alpha,\beta}\right)\right]+\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R^{0}{}_{\alpha,\beta}-R^{0}{}_{\beta,\alpha}\right)+\\
&+\frac{1}{2}t*\rho^{-1}\left(R'_{\alpha,\beta}-R'_{\beta,\alpha}\right)+J^{-1}t*\in_{\alpha,\beta}\left(\hat{R}'_{3}+Y_{3}\right)=0\,,\\
&t*C_4^2\left(\hat{R}'_3+Y_3\right)_{,\alpha}-\mu'_{\alpha 3}=-t*C_4^2\hat{R}^0_{3,\alpha}+\mu^0_{\alpha 3}-(\gamma+\varepsilon).\left(g_3 t+t_3\right)_{,\alpha}\,,
\end{aligned}\qquad (4.53)$$

وهنا ننوه إلى أنه في هذه الحالة يكون: $\theta'(\mathbf{x},t)=0\,,\,e'(\mathbf{x},t)=0$ في $\Omega\times\mathrm{T}$ (حيث: $\Omega=\mathbb{R}^2$).

باستخدام طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في (٤–أ)، نحصل من المعادلات (4.53)، على المعادلات الدقيقة المتممة، والمستقلة التالية، لأجل كل من $\sigma'_{\alpha\beta}\,,\mu'_{\alpha 3}$ ، والمحققة في $\Omega\times\mathrm{T}^{+}$ (حيث: $\Omega=\mathbb{R}^2$):

(4.54)

$$\overset{*}{\Box}_2\,\mathrm{L}\,\sigma'_{\alpha\beta}=2\alpha\left[(\mu+\alpha)\in_{\alpha\beta}\hat{Y}_{3,\gamma\alpha}+(\mu-\alpha)\in_{\alpha\gamma}\hat{Y}_{3,\gamma\alpha}\right]+2\alpha\in_{\alpha\beta}\Box_2\hat{Y}_3\,,$$

$$\overset{*}{\Box}_2\,\mathrm{L}\,\mu'_{\alpha 3}=-(\gamma+\varepsilon)\,\Box_2\hat{Y}_{3,\alpha}\qquad (4.55)$$

حيث:

$$\Box_2=(\mu+\alpha)\,\Delta_1-\rho\,\partial_t^2\,,\;\mathrm{L}=\Box_2\Box_4+4\alpha^2\Delta_1\,,\;\Box_4=(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_1-4\alpha-J\,\partial_t^2\,.$$

*٤ – و) صيغ Fourier-Schaefer-Ignaczak التقليدية والدقيقة المتممة للجسم المعتبر( 2D ( E-N:5 غير المحدود والمتمتع بإجهادات وحرارة ، خارجية، جميعها معدومة:*

بهدف الحصول على صيغ Fourier-Schaefer-Ignaczak التقليدية والدقيقة المتممة للجسم المعتبر، نطبق تحويل Fourier الثلاثي المباشر(4.49) على المعادلات التقليدية المستقلة لأجل: $\sigma^0_{\alpha\beta}\,,\theta^0,\sigma'_{\alpha\beta}\,,\mu'_{\alpha 3}$ ، من ثم نستخدم علاقات التحويل التالية الناتجة عن تحويل Fourier الثلاثي المباشر(4.49)، وخواصه [8]:

$$\boldsymbol{F}_3(f_{,\beta})=(-i\,\xi_\beta)\,\bar{f}\,,\quad \boldsymbol{F}_3(\partial_t f)=(-i\,\tau)\,\bar{f},$$

$$\boldsymbol{F}_3(\Delta_1 f)=-\xi^2\,\bar{f}\,,\;\boldsymbol{F}_3(\overset{*}{\Box}_2 f)=-\mu\,[\,\xi^2-\hat{\sigma}_2^2(\tau)\,]\,\bar{f}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_3(\Box_1 f)=-(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2-\sigma_1^2(\tau)\,]\,\bar{f}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_3(\mathrm{D}f)=-[\,\xi^2-q(\tau)\,]\,\bar{f}\,,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_3(\mathrm{D}_1 f)&=-\{\,(\lambda+\mu)\,[\,\xi^2-q(\tau)\,]-(\lambda+2\mu)\,\boldsymbol{\varepsilon}\,q(\tau)\,\}\,\bar{f}\\
&=-\{\,(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2-(1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q(\tau)\,]-\mu\,[\,\xi^2-q(\tau)\,]\,\}\,\bar{f}\,,\\
\boldsymbol{F}_3(\mathrm{D}_2 f)&=(\lambda+2\mu)\{[\xi^2-q(\tau)][\xi^2-\sigma_1^2(\tau)]-\boldsymbol{\varepsilon}\,q(\tau)\,\xi^2\}\,\bar{f}\\
&=(\lambda+2\mu)\,W_4(\xi,\tau)\,\bar{f}\,,
\end{aligned}$$

حيث:
$$\hat{\sigma}_2(\tau) = \frac{\tau}{\hat{c}_2} \ , \ \hat{c}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

حتى نصل إلى:

– *الإجهادات التقليدية، المحولة والحرارة التقليدية، المحولة، التاليين:*

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^0_{\alpha\beta} &= \frac{(-i\,\xi_\beta)\bar{X}_\alpha + (-i\,\xi_\alpha)\bar{X}_\beta}{\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)} + \\
&2\frac{(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2 - (1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q(\tau)\,] - \mu\,[\,\xi^2 - q(\tau)\,]}{(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)]W_4(\xi,\tau)} \times \\
&\times(-i\,\xi_\gamma).(-i\,\xi_\alpha).(-i\,\xi_\beta).\bar{X}_\gamma \\
&-2\mu\frac{\nu_T}{\kappa}.\frac{[\xi^2 - \sigma_1^2(\tau)].(-i\,\xi_\alpha).(-i\,\xi_\beta).\bar{Q}}{(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)]\,W_4(\xi,\tau)} + \\
&+\frac{1}{(\lambda+2\mu)W_4(\xi,\tau)}\Big\{\Big[-\mu\,\left(\xi^2 - q(\tau)\right) + \\
&+(\lambda+2\mu)\,[\,\xi^2 - (1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q(\tau)\,] - \mu\left(\xi^2 - q(\tau)\right)\Big].(-i\,\xi_\gamma)\bar{X}_\gamma + \\
&+\frac{\nu_T}{\kappa}\Big[-(\lambda+2\mu)[\xi^2 - q(\tau)] + \lambda\xi^2\Big].\bar{Q}\Big\}\delta_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

(4.57)

$$\bar{\theta}^0 = \frac{\kappa\,\eta_0}{(\lambda+2\mu)\,W_4(\xi,\tau)}\,q(\tau)\,(-i\xi_\alpha)\,\bar{X}_\alpha + \frac{1}{\kappa W_4(\xi,\tau)}\,[\xi^2 - \sigma_1^2(\tau)]\,\bar{Q}$$

من جهة أخرى، بتطبيق تحويل Fourier الثلاثي المضاعف (4.49) على معادلات -Schaefer Ignaczak الدقيقة المتممة، المستقلة (4.54) و(4.55)، من ثم باستخدام علاقات التحويل التالية الناتجة عن خواص تحويل Fourier الثلاثي المباشر(4.49) [8]:

$$\boldsymbol{F}_3(\square_2\, f) = -(\mu+\alpha)\,[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)]\,\bar{f}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_3(\square_4\, f) = -[\,(\gamma+\varepsilon)\,\xi^2 + 4\alpha - J\tau^2\,]\,\bar{f} = -(\gamma+\varepsilon)\,[\,\xi^2 + \nu_0^2 - \sigma_4^2(\tau)\,]\,\bar{f}\,,$$

$$\boldsymbol{F}_3(\mathrm{L}\,f) = \boldsymbol{F}_3[\,(\square_2\square_4 + 4\alpha^2\Delta_1)\,f\,] =$$

$$= (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\,[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)]\,[\,\xi^2 + \nu_0^2 - \sigma_4^2(\tau)\,]\,\bar{f} - 4\alpha^2\xi^2\,\bar{f} =$$

$$(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\{[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)][\xi^2 + \nu_0^2 - \sigma_4^2(\tau)] - ps\}\,\bar{f} = (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)\,,$$

حيث:

$$\Delta_4(\xi;\tau) = \xi^4 - [\sigma_2^2(\tau)+\sigma_4^2(\tau)+\eta_0^2 - \nu_0^2]\ \xi^2 + \sigma_2^2(\tau)\ [\sigma_4^2(\tau)-\nu_0^2],$$

$$\sigma_2(\tau) = \frac{\tau}{c_2} \quad , \quad \sigma_4(\tau) = \frac{\tau}{c_4} \ , \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}} \quad , \quad c_4 = \sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}}$$

$$s = \frac{2\alpha}{\mu+\alpha} \quad , \quad \eta_0^2 = p\, s \ , \quad \nu_0^2 = 2p = \frac{4\alpha}{\gamma+\varepsilon}$$

نحصل على العلاقات التالية التي تعطي الإجهادات، الدقيقة المتممة، المحولة: $\bar{\sigma}'_{\alpha\beta}, \bar{\mu}'_{\alpha 3}$ :

$$-\mu\,[\,\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)\,]\,(\mu+\alpha)\,(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)\,\bar{\sigma}'_{\alpha\beta} =$$
$$2\alpha\Big[(\mu+\alpha)(-i\,\xi_\alpha)(-i\,\xi_\gamma)\in_{\beta\gamma}\bar{\hat{Y}}_3 + (\mu-\alpha)(-i\,\xi_\beta)(-i\,\xi_\gamma)\in_{\alpha\gamma}\bar{\hat{Y}}_3\Big]$$
$$-2\alpha(\mu+\alpha)\in_{\alpha\beta}[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)\,]\,\bar{\hat{Y}}_3\,,$$

$$-\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)[\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)]\,\Delta_4(\xi;\tau)\,\bar{\mu}'_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)[\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)](-i\xi_\alpha)\bar{\hat{Y}}_3\,,$$

أو:

$$\bar{\sigma}'_{\alpha\beta} = \frac{-2\alpha}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)}\cdot\Big[(\mu+\alpha)(-i\xi_\alpha)(-i\xi_\gamma)\in_{\beta\gamma}\bar{\hat{Y}}_3 +$$
$$+(\mu-\alpha)(-i\,\xi_\beta)(-i\,\xi_\gamma)\in_{\alpha\gamma}\bar{\hat{Y}}\Big] + \tag{4.58}$$
$$+\frac{2\alpha}{\mu(\gamma+\varepsilon)[\,\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)\,]\Delta_4(\xi;\tau)}\cdot\in_{\alpha\beta}[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)\,]\,\bar{\hat{Y}}_3 \quad ,$$

$$\bar{\mu}'_{\alpha 3} = \frac{-1}{\mu[\,\xi^2 - \hat{\sigma}_2^2(\tau)\,]\,\Delta_4(\xi;\tau)}\cdot[\,\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)\,](-i\,\xi_\alpha)\bar{\hat{Y}} \tag{4.59}$$

من أجل متطلبات الجزء اللاحق من هذه الفقرة، تلزمنا مبرهنة الطي التالية لـ Fourier والمتعلقة بتحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الثالثة [8].

***مبرهنة 4.2:***

إذا كان: $F(\xi,\tau) = \boldsymbol{F}_3[\,f(\mathbf{x},t)\,]\ ,\ G(\xi,\tau) = \boldsymbol{F}_3[\,g(\mathbf{x},t)\,]$ ،عندئذ يكون:

أولاً) $\boldsymbol{F}_3[(f \mathbin{\hat{*}} g)(\mathbf{x},t)] = F(\xi,\tau)\,G(\xi,\tau)\,,$

ثانياً) $\boldsymbol{F}_3^{-1}[F(\xi,\tau)\,G(\xi,\tau)] = (f \mathbin{\hat{*}} g)(\mathbf{x},t)\,,$

حيث الرمز $(f \mathbin{\hat{*}} g)(\mathbf{x},t)$ يمثل طي Fourier للتابعين $f(\mathbf{x},t)$ و $g(\mathbf{x},t)$ على $\mathbb{R}^3$ ، وهو بحسب تعريف يعطى بالعلاقة:

$$(f \mathbin{\hat{*}} g)(\mathbf{x},t) := \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s)\ g(\mathbf{y},s)\ d\mathbf{y}\,ds$$

حيث هنا: $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ و $d\mathbf{y} = d y_1\, d y_2$ .

الآن إذا فرضنا أن:

$$\hat{F}_2(\mathbf{x},t) := \boldsymbol{F}_3^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2-\hat{\sigma}_2^2(\tau)}\right], \quad F_1(\mathbf{x},t) := \boldsymbol{F}_3^{-1}\left[\frac{1}{\xi^2-\sigma_2^2(\tau)}\right]$$

$$G_2(\mathbf{x},t) := \boldsymbol{F}_3^{-1}\left[\frac{1}{W_4(\xi,\tau)}\right], \quad G_1(\mathbf{x},t) := \boldsymbol{F}_3^{-1}\left[\frac{1}{\Delta_4(\xi,\tau)}\right]$$

نحصل بتطبيق تحويل Fourier الثلاثي العكسي بالنسبة لـ $(\xi;\tau)$ ، وخواصه، وباستخدام مبرهنة الطي لـFourier [8] على:

– صيغتي Fourier التقليديتين من أجل $\theta^0$ ، $\sigma^0_{\alpha\beta}$، الآتيتين:

(4.60)

$$\begin{aligned}\sigma^0_{\alpha\beta} &= \partial_\beta\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\alpha\right)+\partial_\alpha\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\beta\right)-\frac{2}{\lambda+2\mu}\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\alpha \mathrm{D}_1\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_2 \,\hat{*}\, X_\gamma\right)\\ &-\frac{2\mu\nu_T}{\kappa}\partial_\alpha\partial_\beta\left(G_2 \,\hat{*}\, Q\right)+\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\{\left(\mu\mathrm{D}-\mathrm{D}_1\right)\partial_\alpha\left(G_2 \,\hat{*}\, X_\gamma\right)+\\ &+\frac{\nu_T}{\kappa}\left[\left(\lambda+2\mu\right)\mathrm{D}-\lambda\Delta_1\right]\left(G_2 \,\hat{*}\, Q\right)\Big\}\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

$$\theta^0 = -\frac{\kappa\eta_0}{\left(\lambda+2\mu\right)\kappa}\partial_t\partial_\alpha\left(G_2 \,\hat{*}\, X_\alpha\right)-\frac{1}{\kappa\left(\lambda+2\mu\right)}\Box\left(G_2 \,\hat{*}\, Q\right) \tag{4.61}$$

– صيغتي Fourier-Schaefer-Ignaczak الدقيقتين المتممتين لأجل $\sigma'_{\alpha\beta}\,,\mu'_{\alpha 3}$:

(4.62)

$$\begin{aligned}\sigma'_{\alpha\beta} &= -\frac{2\alpha}{\mu\left(\mu+\alpha\right)\left(\gamma+\varepsilon\right)}\left[\left(\mu+\alpha\right)\in_{\beta\gamma}\partial_\alpha+\left(\mu-\alpha\right)\in_{\alpha\gamma}\partial_\beta\right]\partial_\gamma\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3\right)\\ &-\frac{2\alpha}{\mu\left(\mu+\alpha\right)\left(\gamma+\varepsilon\right)}\in_{\alpha\beta}\Box_2\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3\right),\end{aligned}$$

$$\mu'_{\alpha 3} = \frac{1}{\mu\left(\mu+\alpha\right)}\Box_2\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3\right) \tag{4.63}$$

***نتيجة (١):***

يمكن الحصول على باقي حقول Fourier-Schaefer-Ignaczak،التقليدية،الموافقة $(u^0_\alpha,\varphi^0_3,\varepsilon^0_{\alpha\beta},\kappa^0_{\alpha 3},\mu^0_{\alpha 3})$ باستخدام علاقاتSchaefer-Ignaczak (4.15)–(4.12) و(4.20) و(4.21) ، حيث نحصل على النتائج التالية:

(4.64)

$$u^0_\alpha = \frac{1}{\mu}\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\alpha\right)-\frac{1}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}\mathrm{D}_1\partial_\alpha\partial_\beta\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_2 \,\hat{*}\, X_\beta\right)-\frac{m}{\kappa}\partial_\alpha\left(G_2 \,\hat{*}\, Q\right),$$

$$\varphi^0_3 = \frac{1}{2\mu}\in_{\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\beta\right), \tag{4.65}$$

$$\varepsilon^{0}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\mu}\Big[(\hat{F}_2\,\hat{*}\,X_\alpha)_{,\beta}+(\hat{F}_2\,\hat{*}\,X_\beta)_{,\alpha}\Big]-\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}D_1\partial^3_{\alpha\beta\gamma}(\hat{F}_2\,\hat{*}\,G_2\hat{*}\,X_\gamma) \qquad (4.66)$$
$$-\frac{m}{\kappa}\partial^2_{\alpha\beta}\left(G_2\hat{*}Q\right),$$

$$\mu^{0}_{\alpha3}=\frac{(\gamma+\varepsilon)}{2\mu}\in_{\gamma\beta}\partial^2_{\alpha\gamma}(\hat{F}_2\,\hat{*}\,X_\beta)\quad , \qquad (4.67)$$

$$\kappa^{0}_{\alpha3}=\frac{1}{2\mu}\in_{\gamma\beta}\partial^2_{\alpha\gamma}(\hat{F}_2\,\hat{*}\,X_\beta) \qquad (4.68)$$

***نتيجة (٢):***

يمكن أيضاً أن نحصل على حقول Fourier-Schaefer-Ignaczak ، الدقيقة، المتممة الموافقة $(u'_\alpha,\varphi'_3,\gamma'_{\alpha\beta},\kappa'_{\alpha3},\mu'_{\alpha3})$ باستخدام علاقات Schaefer-Ignaczak (4.24)−(4.22)، حيث نحصل إلى الحقول الدقيقة المتممة التالية:

$$u'_\alpha=-\frac{2\alpha}{\mu(\gamma+\varepsilon)\,(\mu+\alpha)}\in_{\alpha\gamma}\partial_\gamma(\hat{F}_2\hat{*}\,G_1\hat{*}\,\hat{Y}_3), \qquad (4.69)$$

$$\varphi'_3=\frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\Box_2(\hat{F}_2\,\hat{*}\,G_1\,\hat{*}\,\hat{Y}_3), \qquad (4.70)$$

$$\gamma'_{\alpha\beta}=\frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\Big[-2\alpha\in_{\beta\gamma}\partial^2_{\alpha\gamma}+\in_{\beta\alpha}\Box_2\Big](\hat{F}_2\hat{*}\,G_1\hat{*}\,\hat{Y}_3) \qquad (4.71)$$

$$\kappa'_{\alpha3}=\frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\partial_\alpha\Box_2(\hat{F}_2\,\hat{*}\,G_1\,\hat{*}\,\hat{Y}_3) \qquad (4.72)$$

***نتيجة (٣):***

أخيراً بتعويض النتائج المتعلقة بـ $(\sigma^0_{\alpha\beta},\theta^0,u^0_\alpha,\varphi^0_3,\varepsilon^0_{\alpha\beta},\kappa^0_{\alpha3},\mu^0_{\alpha3})$ والنتائج المتعلقة بـ $(\sigma'_{\alpha\beta},u'_\alpha,\varphi'_3,\gamma'_{\alpha\beta},\kappa'_{\alpha3},\mu'_{\alpha3})$ في (٤.١) نحصل على صيغ Fourier-Ignaczak النهائية التالية لأجل: $(\sigma_{\alpha\beta},\theta,u_\alpha,\varphi_3,\kappa_{\alpha3},\gamma_{\alpha\beta},\mu_{\alpha3})$:

(4.73)

$$\sigma_{\alpha\beta}=\partial_\beta\left(\hat{F}_2\hat{*}X_\alpha\right)+\partial_\alpha\left(\hat{F}_2\hat{*}X_\beta\right)-\frac{2}{\lambda+2\mu}\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\alpha\mathrm{D}_1\left(\hat{F}_2\hat{*}G_2\hat{*}X_\gamma\right)$$
$$-\frac{2\mu\nu_T}{\kappa}\partial_\alpha\partial_\beta\left(G_2\hat{*}Q\right)+\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\{\left(\mu\mathrm{D}-\mathrm{D}_1\right)\partial_\alpha\left(G_2\hat{*}X_\gamma\right)+$$
$$+\frac{\nu_T}{\kappa}\Big[(\lambda+2\mu)\mathrm{D}-\lambda\Delta_1\Big]\left(G_2\hat{*}Q\right)\Big\}\delta_{\alpha\beta}-\frac{2\alpha}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\Big[(\mu+\alpha)\in_{\beta\gamma}\partial_\alpha+$$
$$+(\mu-\alpha)\in_{\alpha\gamma}\partial_\beta\Big]\partial_\gamma\left(\hat{F}_2\hat{*}G_1\hat{*}\hat{Y}_3\right)-\frac{2\alpha}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\in_{\alpha\beta}\Box_2\left(\hat{F}_2\hat{*}G_1\hat{*}\hat{Y}_3\right),$$

$$\theta=-\frac{\eta_0}{(\lambda+2\mu)}\partial_t\partial_\alpha\left(G_2\hat{*}X_\alpha\right)-\frac{1}{\kappa(\lambda+2\mu)}\Box\left(G_2\hat{*}Q\right), \qquad (4.74)$$

$$\mu_{\alpha3}=\frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}\in_{\gamma\beta}\partial^2_{\alpha\gamma}(\hat{F}_2\hat{*}X_\beta)+\frac{1}{\mu(\mu+\alpha)}\Box_2\partial_\alpha\left(\hat{F}_2\hat{*}G_1\hat{*}\hat{Y}_3\right), \qquad (4.75)$$

(4.76)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\Big[(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\alpha)_{,\beta} + (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\beta)_{,\alpha}\Big] - \frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)} \mathrm{D}_1 \partial^3_{\alpha\beta\gamma} (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_2 \,\hat{*}\, X_\gamma) - \frac{m}{\kappa}\partial^2_{\alpha\beta}(G_2 \,\hat{*}\, Q) + \frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}\left(-2\alpha \in_{\beta\gamma} \partial^2_{\alpha\gamma} + \in_{\beta\alpha} \square_2\right)(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3),$$

(4.77)

$$\kappa_{\alpha 3} = \frac{1}{2\mu} \in_{\gamma\beta} \partial^2_{\alpha\gamma} (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\beta) + \frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)} \partial_\alpha \square_2 (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3),$$

(4.78)

$$u_\alpha = \frac{1}{\mu}(\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\alpha) - \frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)} \mathrm{D}_1 \partial_\alpha \partial_\beta (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_2 \,\hat{*}\, X_\beta) - \frac{m}{\kappa}\partial_\alpha (G_2 \,\hat{*}\, Q) - \frac{2\alpha}{\mu(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)} \in_{\alpha\gamma} \partial_\gamma (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3),$$

(4.79)

$$\varphi_3 = \frac{1}{2\mu} \in_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, X_\beta) + \frac{1}{\mu(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)} \square_2 (\hat{F}_2 \,\hat{*}\, G_1 \,\hat{*}\, \hat{Y}_3)$$

## ٦. الاستنتاجات والمقترحات:

*الاستنتاجات:* أثبتنا تساوي درجات حرارة عملية Schaefer-Ignaczak الدقيقة المتممة للجسم ( -E N:5 ) 2D دقيق الاستقطاب غير المحدود والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة ثم أوجدنا صيغ Fourier-Schaefer-Ignaczak التكاملية، التقليدية والدقيقة المتممة، والكلية، ذلك باستخدام دمج طريقة التحويلات التكاملية مع طريقة Schaefer-Ignaczak. يمكن استخدام نتائج هذا البحث وتطبيقها في علم مقاومة المواد وعلم التصفيح.

*المقترحات:* نقترح مناقشة المسائل التالية:

١) إيجاد توابع Green (الحلول الأساسية) [9-11] من أجل مسألتي -Schaefer Ignaczak الحديثين والابتدائيتين السابقتين (التقليدية والدقيقة المتممة)

٢) إعادة ماتقدم ذكره من أجل الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة دقيقة الاستقطاب.

## المراجع

[1] Al-Hasan M., Dyszlewicz J. Coupled, *Dynamic Micropolar Problems of Thermoelastic*ity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht,2014.

[2] – Eringen, A. C, *Linear theory of micropolar elasticity*, J. Math, 1966.

[3] –Nowacki, W, *Theory of Asymmetric Elasticity*, Warsaw, PWN, 1986.

[4] Mountajab Al-Hasan, *combining regular solutions of the Schaefer-Ignaczak thermodynamical behaviors relating to the first plane state of elastic strain of the micropolar body subjected to temperature fiel*d, Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis (PAMDA), Vol. 02, No. 01, PP. 27-41, 2023.

[5]- Dyszlewicz, J, Micropolar *Theory of Elasticity, in: Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanic*s, Vol.15, 356 p, Springer. 2004.

[6] – Ignaczak , J *, A completeness problem for stress quations of motion in the linear elasticity,* Arch.Mech. **15** , 225-234 , 1963.

[7] - Ignaczak, J, *Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure, in: Trends of Elasticity and Thermoelasticity*, Witold Nowacki Ann.Volume, Wolters-Noordhoff Groningen, 1971.

[8] – Debnath, L& Bhatta, D, *Integral Transforms and their Applications, (Second Edition*), CRC Press, Boca Raton, Florida, 2007.

[9]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y. - *Theory of Elasticity and Thermal Stresses*, Springer Science+Business Media Dordrecht. 2013.

[10] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., - *The Mathematical Theory of Elasticity, Second Edition*, *CRC Press*, Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742. 2011.

[11]–Dyszlewicz, J, *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19,1996.