مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٢) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (2) 2025

الجاذب الشامل لمعادلة شرودنغر غير الناقصية

منال ناصر حسين*

(تاريخ الإيداع ٢٤/٤/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر ١٢/٦/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

سنعتمد معادلة شرودنغر المتخامدة غير الخطية ثنائية البعد والمزودة بتابع قوة، في الحالة غير الناقصية. نبرهن أنه من أجل معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي فإن المسارات تنجذب نحو جاذب شامل للمعادلة المذكورة.

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنغر غير الناقصية، النظام الديناميكي، الجاذب الشامل.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٢) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (2) 2025

Global attractor for non elliptic Schrödinger equations

Dr. Manal Nasser Hussein*

(Received 24/4/2025.Accepted 12/6/2025)

□ABSTRACT □

We consider a subcritical forced damped 2D Nonlinear Schrödinger equation in the non elliptic case NES. We prove that if the initial data is small enough, the trajectory converges towards a global compact attractor.

Keywords: Non Elliptic Schrödinger Equations, dynamical system, Global attractor.

* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدّمة:

تكتب معادلة شرودنغر غير الناقصية بالشكل:

$$u_t + iu_{xx} - iu_{yy} + ig(|u|^2)u = 0 \qquad (1)$$

حيث $u(\mathrm{t,x,y})$ تمثل السعة العقدية و g تابع كثيرة حدود حيث $\mathrm{g}(0) = 0$.

تملك هذه المعادلة تطبيقات واسعة في سياق الأمواج المائية [20,6] ، وفي فيزياء البلازما [18] ، ونبضات الليزر القصيرة جداً[20] .

في هذا العمل سوف نهتم بدراسة سلوك حلول معادلة متخامدة مزودة بحد قوة خارجية هي معادلة شرودنغر غير الناقصية NES في حالة $g(|u|^2)u = |u|u$، والتي تكتب بالشكل

$$u_t + \gamma u + iu_{xx} - iu_{yy} + i|u|u \ = f(x) \qquad (2)$$

حيث $f(x)$ قوة خارجية مستقلة عن t وتنتمي إلى $H^1(\mathbb{R}^2)$ و $\gamma > 0$ معامل التخامد، بالإضافة إلى كون نظيم f في $L^2(\mathbb{R}^2)$ صغير بقدر كافي.

تشكل هذه المعادلة مع حد التخامد وحد القوة الخارجية نظام ديناميكي غير منتهي الأبعاد كما في السياق المذكور في [21,12,19,17,15].

اهتم العديد من الباحثين بدراسة معادلة شرودنغر الناقصية NLS مع مؤثر لابلاس، إذ أثبت Ghidaglia في العام 1988 وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة في $H^1(\mathbb{R})$ في [5]، ثم في العام ١٩٩٥ أثبت Wang أن هذا الجاذب الضعيف هو جاذب قوي في البحث [23]، بينما نظامية هذا الجاذب قد تم برهانها في [9] عام ١٩٩٦ في بعدين، أما في البعد الواحد وعلى مجال محدود في $\mathbb{R}$ قد تم برهانها عام ١٩٩٨ في [8]، وفي [1] أثبتت Akroun عام 1999 وجود جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ ، وفي العام ١٩٩٧ في [22] وكذلك في العام ٢٠٠٧ في [24] تم إثبات أن نظام Davey-Stewartson الذي هو تعميم لمعادلة شرودنغر يملك جاذب شامل بحالات خاصة، أما في العام 2009 أثبت Hussein وGoubet في [11] أن لهذا النظام جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ ، وأيضاً في عام 2009 درسوا معادلة Davey- Stewartson المقطعة بالنسبة للزمن باستخدام صيغة الاسترخاء (relaxation scheme) وبرهنوا وجود جاذب شامل للنظام الديناميكي الناتج في [10]، وفي عام 2014 درس Alounini و Goubetسلوك حلول معادلة شرودنغر غير المتخامدة مع حد كموني تربيعي في [2]، وفي عام 2016 اثبت Zhu في [25] وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر مع وجود حد تكاملي غير محلي في $H^1(\mathbb{R})$ وفي العام نفسه درس Dabaa وGoubet في [4] سلوك حلول معادلة شرودنغر− بواسون في $\mathbb{R}^3$. في عام ٢٠٢٣ أثبتت Hussein و آخرون في [14] وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر مع حد محلي. في [13] درست Hussein وجود المجموعة الماصة لمعادلة شرودنغر غير الناقصية، وأثبتت أن النظام الديناميكي المتعلق بهذه المعادلة متخامد وفقاً لتعريف النظام الديناميكي المتخامد المذكور في[21] .

سوف ندرس هنا مسألة وجود الجاذب الشامل لهذه المعادلة في الحالة غير الناقصية والذي يعطي وجوده تنبؤاً مهماً بسلوك حلولها.

أهمّية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث في التنبؤ بسلوك النظام الديناميكي لمعادلة شرودنغر غيرالناقصية وما لذلك من أهمية في التطبيقات الفيزيائية، ويهدف هذا البحث إلى دراسة سلوك هذا النظام من خلال الجاذب الشامل.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق دراسة حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من خلال تطبيقات التحليل الدالي. نبحث عن وجود الجاذب الشامل، والصعوبة هنا تأتي كوننا نتعامل مع مؤثر غير ناقصي، ولكن نتجاوز الصعوبة بأخذ معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي، بالإضافة إلى التعامل مع الشكل التكاملي (شكل ديوهامل) لهذه المعادلة.

النتائج والمناقشة:

نذكر بدايةً بعض التعاريف الأساسية لدراستنا.

تعريف١ [21] : من أجل كل مسألة قيمة ابتدائية معرفة بشكل جيد (أي من أجل كل شرط ابتدائي $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ لمعادلة تفاضلية يوجد حل وحيد $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$) فإنه يمكن تعريف نصف زمرة $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ بالشكل

$$S(t): u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \to u(t) \in H^1(\mathbb{R}).$$

وتحقق $\forall\, t, s \geq 0; \quad S(t+s) = S(t)\, S(s)$ و $S(0) = I$.

تعريف٢ [21] : يقال عن مجموعة جزئية محدودة β من $H^1(\mathbb{R}^2)$ أنها مجموعة ماصة إذا تحقق

$$S(t)\beta \subset \beta \qquad \forall\, t > 0$$

ومن أجل كل مجموعة محدودة B من $H^1(\mathbb{R}^2)$ يوجد $t_0(B) > 0$ بحيث

$$S(t)B \subset \beta \qquad \forall\, t > t_0(B).$$

تعريف٣ [21] : لتكن $A \subset H^1(\mathbb{R})$ مجموعة تحقق الخصائص التالية:

- A متراصة وغير خالية في $H^1(\mathbb{R}^2)$.
- $S(t)A = A \quad \forall t \geq 0$.
- A تجذب كل المجموعات المحدودة في $H^1(\mathbb{R})$.

عندئذٍ يسمى A **الجاذب الشامل (Global Attractor)** بالنسبة للنظام الديناميكي $S(t)$.

نكتب مسألة القيمة الابتدائية الموافقة للمعادلة (NES) على الشكل:

$$u_t + \gamma u + i u_{xx} - i u_{yy} + i|u|u = f$$

مزودة بالشرط الابتدائي

$$u(0, x, y) = u_0(x, y)$$

في دراسة سابقة في [13]، تم البرهان أن لمسألة القيمة الابتدائية حل شامل بالنسبة للزمن وذلك من أجل معطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي، وكذلك إثبات وجود المجموعة الماصة من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١: [13]

من أجل R_0 ثابت معطى بالشكل $R_0 = \frac{2|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma^2}$ ومن أجل f صغير بقدر كافي كنظيم في $L^2(\mathbb{R}^2)$ بحيث $R_0{}^2 \leq \frac{\gamma}{16\, c_{str}^3}$ ، و بفرض $Y = \left\{ u_0 \in H^1(R^2) : |u_0|_{L^2}^2 + \frac{|f|_{L^2}^2}{\gamma^2} \leq R_0^2 \leq \frac{\gamma}{16 c_{str}^3} \right\}$

مجموعة تامة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ فإنه يوجد مجموعة محدودة ماصة في $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ ، حيث c_{str} ثابت معطى في متراجحة ستريكارتز

(راجع [6, 7,3]).

نبرهن في هذا العمل أن معادلة شرودنغر المطروحة و المزودة بمعطيات ابتدائية صغيرة بالقدر الكافي تشكل نظام ديناميكي مزود بجاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٢:

من أجل R_0 ثابت معطى بالشكل $R_0 = \frac{2|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma^2}$ ومن أجل f صغير بقدر كافي كنظيم في $L^2(\mathbb{R}^2)$ بحيث $R_0{}^2 \leq \frac{\gamma}{16\, c_{str}^3}$ ، و بفرض $Y = \left\{ u_0 \in H^1(R^2) : |u_0|_{L^2}^2 + \frac{|f|_{L^2}^2}{\gamma^2} \leq R_0^2 \leq \frac{\gamma}{16 c_{str}^3} \right\}$

مجموعة تامة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ فإن النظام الديناميكي $S(t)$ الموافق يملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

إثبات المبرهنة ٢ :

من أجل إنجاز البرهان سنتبع الطريقة المستخدمة في [16] من خلال عدة تمهيديات سنذكرها تباعاً، حيث نبرهن أولاً التراص في $L^2(\mathbb{R}^2)$ ، ومن ثم نتعامل مع شكل ديوهامل للمعادلة من أجل برهان التراص في $H^1(\mathbb{R}^2)$ ، و بالتالي وجود الجاذب كمجموعة $\omega - limite$ من المجموعة المحدودة الماصة.

من أجل $\alpha > 0$ نعتبر χ_α تابع منقطع

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq \alpha \\ 0 & ; |x| \geq 1+\alpha \end{cases}$$

ليكن $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ و $f(\chi_\alpha)$ تتقارب نحو f عندما $\alpha \to \infty$ فإنه أياً كانت $\eta \in [0,1]$ فإنه يوجد $\alpha(\eta) > 0$ بحيث يكون $\forall \eta \in [0,1]$ $\quad |f - f_\eta| \leq \eta$ حيث $f_\eta = f_{\chi_{\alpha(\eta)}}$.

نكتب التابع u كمجموع تابعين v و w حيث v حل للمسألة

$$v_t + \gamma v + i v_{xx} - i v_{yy} = -i|u|v + f - f_\eta , \qquad (3)$$
$$v(0) = u_0 .$$

و w حل للمسألة

$$w_t + \gamma w + i w_{xx} - i w_{yy} = -i|u|w + f_\eta , \qquad (4)$$
$$w(0) = 0 .$$

نبرهن الآن أن v صغير في $L^2(\mathbb{R}^2)$ من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١: من أجل $u_0 \in \beta$ و $\eta \in [0,1]$ يوجد $t(\eta) > 0$ بحيث إن

$$|v|_{L^2} \leq \frac{\eta}{\gamma} \quad \forall t \geq t(\eta)$$

الإثبات: نضرب المعادلة (3) بـ $\bar{v}$ ونأخذ الجزء الحقيقي للمعادلة الناتجة ونكامل

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2+\gamma|v|_{L^2}^2\le\frac{1}{2\gamma}\left|f-f_\eta\right|_{L^2}^2+\frac{\gamma}{2}|v|_{L^2}^2$$

ينتج

$$\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2+\gamma|v|_{L^2}^2\le\frac{\eta^2}{\gamma}$$

وبتطبيق تمهيدية غرونوال [3] يتم المطلوب.

نبرهن الآن التمهيدية التالية:

تمهيدية ٢ :

من أجل $u_0\in\beta$ فإن w تبقى محدودة في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

الإثبات: نضع $w_1=we^{\gamma t}$ وبالتالي w_1 حل للمعادلة

$$w_1=-i\int_0^t U(t-s)|u|\,w_1ds+e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}f_\eta\,ds$$

باتباع نفس الأسلوب المتبع في برهان المبرهنة ١ في [13] نجد أنه يوجد $h>0$ بحيث $|w|_{H^1}\le h$.

تمهيدية ٣ :

من أجل $\eta\in[0,1]$ يوجد $K'>0$ يعتمد على $\gamma\,,|f|_{L^2},\eta$ بحيث إن من أجل $u_0\in\beta$

$$|\rho w|_{L^2}^2\le K'$$

حيث $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

الإثبات: نضرب المعادلة (4) بـ $\rho^2\bar{w}$ ومن ثم نكامل ونأخذ الجزء الحقيقي

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|_{L^2}^2+\gamma|\rho w|_{L^2}^2-Im\int\rho^2\bar{w}\left(w_{xx}-w_{yy}\right)=Re\int\rho^2\bar{w}f_\eta$$

حيث

$$-Im\int\rho^2\bar{w}\left(w_{xx}-w_{yy}\right)\;=2Im\int\rho\bar{w}\left(w_x-w_y\right)$$

نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|_{L^2}^2+\gamma|\rho w|_{L^2}^2\le|\rho w|_{L^2}|w_x-w_y|_{L^2}+|\rho w|_{L^2}|\rho f_\eta|_{L^2}$$
$$\le\frac{\gamma}{2}|\rho w|_{L^2}^2+\frac{1}{\gamma}h^2+\frac{1}{\gamma}|\rho f_\eta|_{L^2}^2$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dt}|\rho w|_{L^2}^2+\gamma|\rho w|_{L^2}^2\le K'$$

بتطبيق تمهيدية غرونوال [3] نجد

$$|\rho w|_{L^2}^2\le K'$$

وبما أن $H^1(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2,(1+\rho^2)dxdy)\subseteq L^2(\mathbb{R}^2)$ تطبيق متراص فبذلك تم إنهاء برهان التراص في $L^2(\mathbb{R}^2)$ أي أنه من أجل $t\ge t(\eta)$ فإنه

$$S(t)\beta\subset B_{L^2}(0,\sqrt{\eta K})+K_n\subset L^2(\mathbb{R}^2)$$

حيث K_n متراصة في $L^2(\mathbb{R}^2)$.

ويكون من أجل كل متتالية $t_n \to \infty$ و $u_n \in \beta$ يوجد متتالية جزئية من $S(t_n)u_n$ تتقارب بقوة في $L^2(\mathbb{R}^2)$.

تمهيدية ٤ :

من أجل t موجب تكون $S(t)$ مستمرة على المجموعات المحدودة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ من أجل تبولوجيا قوية من $L^2(\mathbb{R}^2)$.

البرهان مشابه للحالة الناقصية لذلك تم إهماله.

نبرهن الآن التراص في $H^1(\mathbb{R}^2)$:

تمهيدية ٥ :

من أجل كل متتالية $t_j \in \beta$ و $t_j \to \infty$ يوجد $z \in H^1(\mathbb{R}^2)$ و متتالية جزئية $S(t_j)u_j$ تتقارب بقوة من z في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

الإثبات: من الخطوة الأولى نجد أنه يوجد متتالية جزئية من $S(t_j)u_j$ تتقارب من z بضعف في $H^1(\mathbb{R}^2)$ و بقوة في $L^2(\mathbb{R}^2)$ وأنه من أجل $T > 0$ و $t_j > T$ وحيث $S(t_j - T)u_j \in \beta$ متتالية محدودة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ تتقارب من $S(-T)z$ بضعف في $H^1(\mathbb{R}^2)$ وبقوة في $L^2(\mathbb{R}^2)$ من $S(-T)z$ لأن $S(t)$ مستمر على المجموعات المحدودة في $H^1(\mathbb{R}^2)$ من أجل التبولوجيا القوية في $L^2(\mathbb{R}^2)$. لنأخذ $S(t_j)u_j$ من β وبالتالي

$$lim_{j\to\infty}\left|S(t_j)u_j - z\right|_{L^2_{T,x,y}} = 0 \text{ و } S(t_j)u_j \to z \; in \; L^2(\mathbb{R}^2) \; .$$

نبرهن الآن أن $\nabla S(t_j)u_j$ تتقارب من ∇z في $L^2(\mathbb{R}^2)$. وبما أن $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$ وباستخدام المتراجحة

$$|u|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq |u|_{H^1}^{\frac{1}{2}}|u|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

نجد $lim_{j\to\infty}\left|e^{\gamma t}S(t_j)u_j - e^{\gamma t}z\right|_{L^4_{T,x,y}} = 0$ ، وبذلك تم إنجاز التمهيدية ٥.

نبرهن الآن تمهيدية تعطينا نتائج محلية على $[0,T]$ ومن ثم نبرهن شموليتها.

تمهيدية ٦ :

بفرض u و r حلين للمعادلة (2) حيث $v = ue^{\gamma t},\; q = re^{\gamma t}$ بشرطين ابتدائيين r_0 و u_0 على الترتيب عندئذ فإنه من أجل $t \in [0,T]$ فإنه يوجد $d > 0$ و $\delta < 1$ بحيث يكون

$$|\nabla u - \nabla r|_{L^2_{x,y}} \leq \delta|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2de^{-\gamma T}|u - r|_{L^2_{x,y}}$$

وكذلك من أجل $t \in [(k-1)T, kT]$ فإن

$$|\nabla u - \nabla r|_{L^2_{x,y}} \leq \delta^k|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2d\sum_{l=0}^{k-1}\delta^{k-1}\,|u(lT) - r(lT)|_{L^2_{x,y}}.$$

الإثبات: من أجل $t \in [0,T]$ فإنه

$$|e^{\gamma T}\nabla(|u|u - |r|r)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x,y}} \leq c_{str}T^{\frac{1}{2}}|u - r|_{L^2_{x,y}}|\nabla v + \nabla q|_{L^4_{T,x,y}}$$
$$+c_{str}T^{\frac{1}{2}}|u + r|_{L^2_{x,y}}|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x,y}}$$

وبما أن $|v|_{L^2_{x,y}}, |q|_{L^2_{x,y}} \geq R_0$ فإن

$$|e^{\gamma T}\nabla(|u|u-|r|r)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x,y}} \leq d|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}} + \frac{1}{2}|\nabla v-\nabla q|_{L^4_{T,x,y}}$$

حيث $2c_{str}T^{\frac{1}{2}}\left(|\nabla u_0|_{L^2_{x,y}} + |\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2k_1\right) = d.$

من جهة لدينا

$$|\nabla v-\nabla q|_{L^4_{T,x,y}} \leq \mathbf{2}c_{str}|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2d|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}}$$

ومن جهة أخرى

$$|\nabla v-\nabla q|_{L^2_{x,y}} \leq |\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + d|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}} + \frac{1}{2}|\nabla v-\nabla q|_{L^4_{T,x,y}}$$

وبالتالي

$$|\nabla v-\nabla q|_{L^2_{x,y}} \leq (1+c_{str})|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2d|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}}$$

$$\leq e^{c_{str}}|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2d|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}}$$

ينتج عنه

$$|\nabla u-\nabla r|_{L^2_{x,y}} \leq e^{-(\gamma T-c_{str})}|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2de^{-\gamma T}|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}}$$

أي أنه يوجد $\delta = e^{-(\gamma T-c_{str})} < 1$ بحيث يكون

$$|\nabla u-\nabla r|_{L^2_{x,y}} \leq \delta|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2de^{-\gamma T}|u-\mathrm{r}|_{L^2_{x,y}}$$

و من أجل $\mathrm{t} \in [(k-1)T, kT]$ نحصل على

$$|\nabla u(kT)-\nabla r(kT)|_{L^2_{x,y}} \leq \delta^k|\nabla u_0-\nabla r_0|_{L^2_{x,y}} + 2d\sum_{l=0}^{k-1}\delta^{k-1}\,|u(lT)-r(lT)|_{L^2_{x,y}}.$$

وبذلك تم إنجاز برهان التمهيدية ٦.

لنكمل الآن إثبات المبرهنة ٢ ؛ لدينا $S(t_j)u_j$ ، z حلان للمعادلة (2) و بالتالي

$$\left|\nabla S(t_j)u_j-\nabla z\right|_{L^2_{x,y}} \leq \delta^k\left|\nabla S(t_j-kT)u_j-\nabla S(-kT)z\right|_{L^2_{x,y}}$$

$$+2d\sum_{l=0}^{k-1}\delta^{k-1}\left|S(t_j-kT+lT)u_j-S(lT-kT)z\right|_{L^2_{x,y}}$$

وبالتالي

$$\limsup_{\mathrm{j}\to\infty}\left|\nabla S(t_j)u_j-\nabla z\right|_{L^2_{x,y}} \leq \delta^k\limsup_{\mathrm{j}\to\infty}\left|\nabla S(t_j-kT)u_j-\nabla S(-kT)z\right|_{L^2_{x,y}}$$

وبما أن $S(t_j-kT)u_j$ تتقارب بضعف في $H^1(\mathbb{R}^2)$ وبالتالي $\left(S(t_j-kT)u_j-S(-kT)z\right)$ محدودة في $H^1(\mathbb{R}^2)$. بجعل $k\to\infty$ نجد $S(t_j)u_j$ تتقارب بقوة من z في $H^1(\mathbb{R}^2)$.

هكذا يكون تم إثبات المبرهنة ٢ و يمكن تلخيص ما سبق في النتيجة التالية:

نتيجة:

لتكن $\mathcal{A}$ مجموعة معرفة بالشكل

$$\mathcal{A} = \{a\in\beta, \exists\varphi_n\in\beta\,, t_n\to+\infty\,; S(t_n)\varphi_n\to a\ in\ H^1(\mathbb{R})\}$$

فإن $\mathcal{A}$ جاذب شامل ومتراص في $H^1(\mathbb{R}^2)$ للمعادلة (٢).

الاستنتاجات والتوصيات:

استنتجنا أن معادلة شرودنغر في الحالة الناقصية تملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ ونوصي بدراسة أبعاد هذا الجاذب ونظاميته.

المراجع:

[1] Akroune, N. (1999). Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation on R. *Applied Mathematics Letters*, *12*(3), 45-48.

[2] Alouini, B., & Goubet, O. (2014). Regularity of the attractor for a Bose-Einstein equation in a two dimensional unbounded domain. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, *19*(3), 651-677.

[3] Cazenave,T. (1990). An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equation, *Textos de Métodos Matemáti- cos, Rio de Janeiro*.

[4] Dabaa, A., & Goubet, O. (2016). Long time behavior of solutions to a Schrödinger-Poisson system in R^3. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *15*(5), 1743.

[5] Ghidaglia, J. (1988). Finite dimensional behavior for the weakly damped driven Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5, 365-405.

[6] Ghidaglia, J., & Saut, J. (1993). Nonelliptic Schrödinger equations. *Nonlinear Sci. 3*, no. 2, 169-195.

[7] Ghidaglia, J., & Saut, J. (1990). On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Non- linearity 3* , 475-506.

[8] Goubet, O. (1998), Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^2$, *Adv. Differential Equations*, 3, 337-360.

[9] Goubet, O. (1996), Regularity of the attractor for the weakly damped nonlinear
Schrödinger equations, *Applicable Anal.*, 60, 99-119.

[10] Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Dynamical properties for a relaxation scheme applied to a weakly damped non local nonlinear Schrodinger equation. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, *17*, 71-82.

[11] Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Global attractor for the Davey-Stewartson system on $\mathbb{R}^2$. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *8*(5), 1555-1575.

[12] Hale, J. (1988). Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, *Math. surveys and Monographs, AMS, Providence*, 25.

[13] Hussein, M. (2023). Dissipative dynamical system for non elliptic Schrödinger equation.
Tartous university journal for research and scientific studies, Basic sciences series, 7(3).

[14] Hussein, M.& Injrou, S.& Basset, O. (2023). Global Attractor for damped nonlinear Schrodinger equation in $H^1(\mathbb{R})$. *Tartous university journal for research and scientific studies, Basic sciences series*, 6(3).

[15] Kato, T. (1975). Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, *Lecture Notes in Math., 448, Springer*, 25-70.

[16] Laurençot, P. (1995). *Long time Behaviour for weak damped driven non linear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^N, N \leq 3$, *DEA* .

[17] Miranville, A., & Zelik, S. (2008). Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains, *Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations,4, C.M. Dafermos and M. Pokorny eds., Elsevier, Amsterdam*, (103-200).

[18] Nishinari, K., & Abe, K., & Satsuma, J. (1994). Multi-dimensional behavior of electrostatic ion wave in a magnetized plasma, *Phys. Plasmas*, 1, 2559-2565.

[19] Raugel, G. (2002). Global attractors in partial differential equations, *Handbook of Dynamical Systems, North-Holland, Amsterdam*, 2, (885-982).

[20] Sulem, C., & Sulem, P-L.(1999) The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse. *Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York*.

[21] Temam, R. (1997). Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, *Springer-Verlag*, Second Edition.

[22] Wang, B., & Guo, B. (1997). Attractors for the Davey-Stewartson systems on $\mathbb{R}^2$, *J. Math. Phys.* , 38(5), 2524-2534.

[23] Wang, X. (1995). An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its applications to their attractors, *Physica D*, 88, 167-175.

[24] Zhao, C. & Li, Y. & Zhou, S. ,(2007). Asymptotic smoothing effect of solutions to Davey-Stewartson systems on the whole plane, *Acta Math. Sinica*, 23(11), 2043-2060.

[25] Zhu, C. (2016). Global Attractor of nonlocal nonlinear Schrodinger equation on $\mathbb{R}$. *Advances in Analysis*, 1(1).