مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٢) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (2) 2025

تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي

الدكتور أحمد كنج*

الدكتور وديع علي**

أحمد عربيش***

(تاريخ الإيداع ١٢/٤/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر ٣/٦/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

تركز عملنا في هذا البحث حول إثبات نتيجة هامة في مجال نظرية تقريب الدوال العقدية والتي تخص تقريب أسرة من الدوال التي تنتمي إلى فضاء سميرنوف أورليتش الموزن المعرفة على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي والمحاطة بمنحنيين ينتميان إلى أسرة منحنيات ديني الملساء بدوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات فابير – لورنت .

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، فضاء سميرنوف أورليتش الموزن، كثيرات حدود فابير، منحنيات ديني الملساء.

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

** استاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٢) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (2) 2025

Approximation of Functions of Weighted Smirnov-Orlicz Space on Doubly-Connected Domain in the complex plane

Dr. Ahmed Kinj*
Dr. Wadih Ali**
Ahmed Arbeash***

(Received 12/4/2025.Accepted 3/6/2025)

□ABSTRACT □

In this research, our work focused on proving an important result in the field of the theory of approximation of complex functions, which is concerns the approximation of a family of functions that belong to the weighed Smirnov-Orlicz space defined on a doubly – connected domain in the complex plane bounded by two curves belonging to the class of Dini-smooth curves with rational functions by using the partial sums of Faber-Lorent series.

Keywords: Approximation theory, weighted Smirnov – Orlicz Space, Faber Polynomials, Dini – Smooth curves.

* Assisant professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria, a.king@tishreen.edu.sy
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
*** Postgraduate student, Dep. of Mathematics, Tishreen University, Lattakia, Syria.

المقدمة:

يُعد فضاء أورليتش من أهم الفضاءات الدالية التي نشأت كتعميم لفضاء ليبيغ وبدأت دراسته من قبل العالم البولندي Orlicz عام 1932 [1] ونشطت دراسته بعد الحرب العالمية الثانية، واحتل هذا الفضاء مكاناً متميزاً بين الفضاءات الدالية وعُنيَ باهتمام الكثير من الباحثين ففي عام 2005 [2] درس Israfilov بمشاركة Guven تقريب دوال فضاء أورليتش المعرفة على منحنيات كارلسون بدوالٍ كسرية، ثم تابعا العمل معاً في عام 2006 [3] بدراسة مسألة تقريب دوال فضاء أورليتش الموزن المعرفة على دائرة الواحدة بواسطة كثيرات الحدود المثلثية. في عام 2008 [4] تمكن Akgun and Israfilov من تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش المعرفة على منحني ديني أملس باستخدام معامل الملوسة الكسري. كما توصل Jafarov عام *2012* [5] إلى تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن المعرفة على منطقة بسيطة الترابط ومحاطة بمنحني كارلسون بكثيرات حدود. في السنوات الأخيرة إزداد الاهتمام بفضاء أورليتش بسبب تطبيقاته المختلفة في العديد من المجالات ، نذكر على سبيل المثال في عام 2024 [6] درس Bilalov وآخرون مسائل القيم الحدودية في فضاء أورليتش. كما عالج Metwali وآخرون في العام 2024 [7] نظريات الوجود للمعادلات التكاملية، وقابلية حلها في فضاء أورليتش. قمنا في هذا العمل بدراسة مسألة تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن المعرفة على منطقة ثنائية الترابط والمحاطة بمنحنيين أملسين بدوال كسرية، ومن الجدير بالذكر أن تقريب الدوال العقدية على مناطق ثنائية الترابط تمت دراسته على العديد من الفضاءات الدالية المختلقة نذكر منها:

- درس Jafarov عام 2011 تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش المعرفة على منطقة ثنائية الترابط والمحاطة بمنحنيين ديني أملسين بدوالٍ كسرية في [8].
- بحث الدكتور ALI وآخرون عام 2017 في مسألة تقريب دوال فضاء سميرنوف للدوال التحليلية متغيرة الأس المعرفة على منطقة ثنائية الترابط والمحاطة بمنحنيين ديني أملسين في [9].
- عالج الدكتور kinj عام 2018 مسألة تقريب دوال فضاء موري سميرنوف المعرفة على منطقة ثنائية الترابط والمحاطة بمنحنيين ديني أملسين بدوالٍ كسرية في [10]، كما تابع هذا العمل عام 2022 بدراسة تقريب دوال فضاء موري سميرنوف ذو الأس المتغير المعرفة على منطقة ثنائية الترابط والمحاطة بمنحنيين ديني أملسين في [11].

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بدراسة تقريب الدوال المعقدة من خلال استبدالها بدوال أبسط منها بحيث تكون تقريباً للدالة المعطاة، ولذلك يتجلى الهدف الرئيسي لهذا البحث في دراسة مسألة تقريب أسرة دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن المعرفة على منطقة ثنائية الترابط بدوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات فابير لورنت

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص نظرية تقريب الدوال العقدية في الرياضيات النظرية وهو يملك صبغة نظرية وتستخدم فيه طرائق نظرية تخص نظرية التقريب والتحليل العقدي وكثيرات حدود فابير.

تعاريف ومفاهيم أساسية ومبرهنات مساعدة:

تعريف (1) [12]: الأسرة N – function:

يقال عن الدالة $M(u): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ أنها من الأسرة N – function إذا كان لها التمثيل التكاملي الآتي:

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\ dt$$

حيث الدالة $p(t)$ دالة مستمرة من اليمين وموجبة عندما $t \geq 0$ وغير متناقصة وتحقق

$$p(0) = 0 \quad , \quad p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$$

كما أن الدالة

$$N(v) = \int_0^{|v|} p(s)\ ds$$

تدعى الدالة المتممة للدالة $M(u)$. حيث $p(s) = \sup\limits_{p(t)\leq s} t$

تعريف (*2*) [13] فضاء دوال ليبيغ(*Lebesgue functions space*)

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وليكن $1 \leq p < \infty$ عدداً حقيقياً. يُعرف فضاء دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$ بأنه مجموعة كل الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ التي يكون من أجلها الدالة $|f|^p$ قابلة للمكاملة على المنحني Γ أي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| < \infty$$

يشكل $L_p(\Gamma)$ فضاء باناخ إذا زُود بالنظيم الآتي:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعريف (*3*) [14] فضاء دوال أورليتش $L_M(\Gamma)$ (Orlicz functions Space)

ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ والدالة M من الأسرة N – function ، نسمي $L_M(\Gamma)$ أسرة جميع الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ والمحققة للشرط الآتي:

$$\int_\Gamma M(\lambda|f(z)|)|dz| < \infty$$

من أجل ثابت موجب λ

يشكل $L_M(\Gamma)$ فضاء باناخ إذا زُود بالنظيم الآتي:

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} = \sup_{g\in L_N(\Gamma)} \left\{\int_\Gamma (f.g)(z)\ |dz|\right\} \qquad (1)$$

لتكن N هي الدالة المتممة للدالة M وتعرّف بالعلاقة:

$$N(y) = \max_{x\geq 0}\{\ xy - M(x)\}$$

- إنّ أية دالة من فضاء أورليتش قابلة للمكاملة ليبيغياً على Γ أي: $L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)$.

حالة خاصة إذا كان $M(x) = x^p$ حيث $1<p<\infty$ فإن فضاء دوال أورليتش يؤول إلى فضاء دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$ أي أن فضاء دوال ليبيغ هو حالة خاصة من فضاء دوال أورليتش

تعريف *(4)* [16]: فضاء دوال سميرنوف أورليتش $E_M(G)$ (Sairnov Orlicz functions Space)

يُقال عن الدالة f التحليلية في المنطقة بسيطة الترابط G أنها تنتمي إلى $E_M(G)$ إذا كان:

$$\int_{\Gamma_r} M(|f(\xi)|)\,|d\xi| < \infty$$

حيث Γ_r صورة الدائرة $\{w \in \mathbb{C};\ |w| = r; 0 < r < 1\}$ وفق تحويل محافظ يحول قرص الواحدة D إلى المنطقة G.

يشكل $E_M(G)$ فضاء باناخ إذا زُود بالنظيم

$$\|f\|_{E_M(G)} = \|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

تعريف(5):[17] التحويل المحافظ (conformal mapping)

لتكن G و G' منطقتين في المستوي العقدي و $f: G \to G'$ تقابلاً، يُقال عن f إنَّه تحويلٌ محافظٌ للمنطقة G في المنطقة G' إذا كانت الدالة f تحليلية في المنطقة G باستثناء نقطة واحدة على الأكثر تشكل قطباً بسيطاً، أي قطباً من المرتبة الأولى للدالة f .

من المعلوم أنَّه إذا كان $f: G \to G'$ تحويلاً محافظاً للمنطقة G في المنطقة G'، كان $f^{-1}: G' \to$ G تحويلاً محافظاً للمنطقة G' في المنطقة G .

مبرهنة مساعدة (1) [18]: مبرهنة ريمان في التحويلات المحافظة (Riemann Mapping Theorem)

لتكن $G \subset \mathbb{C}$ منطقة بسيطة الترابط وليكن $D = \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| < 1\}$ قرص الواحدة ، ولتكن $z_0 \in G$ عندئذ يوجد تحويل محافظ ينقل المنطقة G إلى داخل قرص الواحدة D ويحقق:

$f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$.

نتيجة (1) [15]:

نستنتج من مبرهنة ريمان في التحويلات المحافظة ما يأتي:

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي عندئذ يوجد تحويل محافظ وحيد $w = \mathcal{A}(z)$ ينقل خارج المنحني Γ إلى خارج قرص الواحدة $D^- = \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| > 1\}$ ويحقق:

$$\mathcal{A}(\infty) = \infty\ , \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\mathcal{A}(z)}{z} > 0$$

ولنرمز بـ $\mathcal{B}$ للدالة العكسية للدالة $\mathcal{A}$

كما يوجد تحول محافظ وحيد $w = \mathcal{A}_1(z)$ ينقل داخل المنحني Γ إلى خارج قرص الواحدة D^- ويحقق:

$$\mathcal{A}_1(0) = \infty\ , \qquad \lim_{z\to 0} z.\mathcal{A}_1(z) > 0$$

تعريف *(6)* [18]: منحني ديني أملس (*Dini – Smooth Curve*)

لتكن $\hbar$ دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$، وليكن $\omega_{\hbar}(t)$ معامل الاستمرارية للدالة $\hbar$ المعرف بالعلاقة:

$$\omega_{\hbar}(t) = \sup_{|t_1 - t_2| \le t} |\hbar(t_1) - \hbar(t_2)| \ ;\ t \ge 0$$

يُقال عن الدالة $\hbar$ إنها دالة ديني إذا حققت الشرط الآتي:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega_{\hbar}(t)}{t}\, dt < \infty$$

كما يُقال عن منحني جوردان المحدود الطول Γ إنَّه منحني ديني – أملس إذا كان له التمثيل الآتي :

$$\Gamma: \{z = z(\tau), \qquad 0 \le \tau \le 2\pi\}$$

وكانت $z'(\tau)$ دالة ديني وتحقق الشرط $z'(\tau) \neq 0$ من أجل كل τ من $[0, 2\pi]$.

ومن المعلوم أنه إذا كان Γ ديني – أملس فإنه يوجد ثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 بحيث يتحقق

$$0 < C_1 \le |\mathcal{A}'(z)| \le C_2 < \infty \quad ; z \in G^-$$

(3)

$$0 < C_3 \le |\mathscr{B}'(w)| \le C_4 < \infty \quad ; \ |w| \ge 1$$

تعريف (*7*) [19]:أوزان ماكنهوبت(Muckenhoupt Weights)

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي و $1<p<\infty$ وَ $q=\frac{p}{p-1}$ تعرّف أوزان ماكنهوبت $A_p(\Gamma)$ بأنها مجموعة دوال الوزن $\omega: \Gamma \to [0, \infty]$ التي تحقق شرط ماكنهوبت الآتي:

$$\sup_{z\in\Gamma} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r} \int_{\Gamma(z,r)} [\omega(\tau)]^p |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{r} \int_{\Gamma(z,r)} [\omega(\tau)]^{-q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

حيث:

$$\Gamma(z, r) = \{t \in \Gamma; \ |t - z| < r\}$$

تعريف (*8*) [20]: دليلا بويد (Boyd indices)

لتكن $M^{-1}: [0, \infty[\to [0, \infty[$ الدالة العكسية للدالة M، يُعرف دليلا بويد للدالة M في فضاء أورليتش بالعلاقتين الآتيتين:

$$\alpha_M = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\log K(t)}{\log t} \quad , \beta_M = \lim_{t\to 0^+} -\frac{\log K(t)}{\log t}$$

حيث الدالة $K:]0, \infty[\to]0, \infty[$ تعطى بالعلاقة:

$$K(t) = \lim_{t\to+\infty} \sup \frac{M^{-1}(y)}{M^{-1}(ty)}; \ \ t > 0$$

من **[20]** معلوم أنَّ $0 \le \alpha_M \le \beta_M \le 1$ وأن $\alpha_N + \beta_M = 1$ وَ $\alpha_M + \beta_N = 1$

تعريف (*9*) [21]: فضاء دوال أورليتش الموزن $L_M(\Gamma, \omega)$ (Weighted Orlicz functions Space)

تنتمي الدالة f القابلة للمكاملة على المنحني Γ إلى $L_M(\Gamma, \omega)$ إذا تحقق الشرط:

$$f.\omega \in L_M(\Gamma)$$

يشكل $L_M(\Gamma, \omega)$ فضاء باناخ إذا زود بالنظيم

$$\|f\|_{L_M(\Gamma,\omega)} = \|f.\omega\|_{L_M(\Gamma)} \qquad \dots (4)$$

تعريف(*10*)[21]: فضاء دوال سميرنوف أورليتش الموزن$E_M(G, \omega)$ (*Weighted Smirnov Orlicz functions Space*)

لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني جوردان محدود الطول Γ و ω دالة وزن معرفة على المنحني Γ ،يُرمز بـ $E^1(G)$ لأسرة جميع الدوال $f: G \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة G .

يُعرف فضاء دوال سميرنوف أورليتش الموزن بالعلاقة الاتية:

$$E_M(G,\omega) = \{f \in E^1(G);\ f \in L_M(\Gamma,\omega)\ \}$$

يشكل $E_M(G,\omega)$ فضاء باناخ إذا زود بالنظيم:

$$\|f\|_{E_M(G,\omega)} = \|f\|_{L_M(\Gamma,\omega)}$$

مبرهنة مساعدة (*2*) **[14]:** لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني جوردان محدود الطول Γ إذا كان $f \in L_1(\Gamma)$ فإن الدالتان المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi_i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\,;\quad z \in G$$

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi_i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\,;\quad z \in G^-$$

تحليليتان في G و G^- على الترتيب و $f^-(\infty) = 0$.

- من أجل $z \in \Gamma$ فإن المؤثر S_Γ المعرف بالعلاقة

$$S_\Gamma(f)(z) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{\Gamma \backslash \Gamma(z,\epsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

حيث:

$$\Gamma(z,\epsilon) = \{\xi \in \Gamma;\ |\xi - z| < \epsilon\}$$

يدعى مؤثر كوشي الشاذ.

وترتبط الدلتان f^+ و f^- مع الدالة f ومع مؤثر كوشي الشاذ للدالة f من خلال علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\left.\begin{aligned} f^+(z) &= S_\Gamma(f) + \frac{1}{2}f(z) \\ f^-(z) &= S_\Gamma(f) - \frac{1}{2}f(z) \\ f(z) &= f^+(z) - f^-(z) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

مبرهنة مساعدة(*3*) **[21]:** ليكن $0 < \alpha_M < \beta_M < 1$ و $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(T)$ و $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ عندئذٍ:

$$f^+ \in E_M(G,\omega), \qquad f^- \in E_M(G^-,\omega)$$

النتائج والمناقشة:

لإيجاد تقريب الدالة f نوجد سلسلة المجاميع الجزئية لسلسلة فابير لورنت

نفرض أن U منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ محاطة بمنحنيي جوردان Γ_1 و Γ_2 (سنفرض أن المنحني المغلق Γ_2 محتوى في المنحني المغلق Γ_1) وبدون التقليل من العمومية نفرض أن $0 \in int\ \Gamma_2$ ،ولتكن

$$U_1^\infty = ext\ \Gamma_1, \qquad U_1^0 = int\ \Gamma_1$$

$$U_2^{\infty} = ext\, \Gamma_2, \qquad U_2^0 = int\, \Gamma_2$$

وسنرمز بـ $w = \varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ U_1^{∞} إلى D^- والمحققة للشروط :

$$\varphi\,(\infty) = \infty \qquad , \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

كما سنرمز بـ $w = \varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ U_2^0 إلى D^- والمحققة للشروط:

$$\varphi_1(0) = \infty \qquad , \qquad \lim_{z\to 0} z.\varphi_1(z) > 0$$

ولنرمز بـ Ψ و Ψ_1 للدوال العكسية للدوال φ و φ_1 على الترتيب.

ونرمز بـ $T = \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| = 1\}$ للدائرة الواحدية حيث $D^-=ext\ T$, $D=int\ T$

ولنأخذ منحنيات السوية في المناطق U_1^0 و U_2^0 والتي تُعرّف من أجل $r_0, \rho_0 > 1$ بالعلاقتين

$$C_{\rho_0} = \{z \in \mathbb{C};\ |\varphi(z)| = \rho_0\}$$
$$C_{r_0} = \{z \in \mathbb{C};\ |\varphi_1(z)| = r_0\}$$

تُعرف كثيرات حدود فابير $F_k(z)$ من الدرجة k بالعلاقة [17] :

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}; \quad z \in U_1^0, w \in D^- \qquad \dots (5)$$

• يمكن تمثيل كثيرات حدود فابير $F_k(z)$ وفق العلاقات الآتية:

- إذا كانت $z \in int\ C_{\rho_0}$ عندئذٍ:

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\rho_0}} \frac{[\varphi\,(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{|w|=\rho_0} \frac{\Psi'(w)\, w^k}{\Psi(w) - z} dw \qquad \dots (6)$$

- وإذا كانت $z \in ext\ C_{\rho_0}$ عندئذٍ:

$$F_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{C_{\rho_0}} \frac{[\varphi\,(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \qquad \dots (7)$$

وبطريقة مماثلة تُعرف كثيرات حدود فابير $\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ من الدرجة k بقوى $\frac{1}{z}$ بالعلاقة [17]:

$$\frac{\Psi_1'(w)}{\Psi_1(w) - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}; \quad z \in U_2^{\infty}, w \in D^- \qquad \dots (8)$$

• يمكن تمثيل كثيرات حدود فابير $\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ وفق العلاقات الآتية:

- إذا كانت $z \in int\ C_{r_0}$ عندئذٍ:

$$\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{C_{r_0}} \frac{[\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \qquad \dots (9)$$

- إذا كانت $z \in ext\ C_{r_0}$ عندئذٍ:

$$\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{C_{r_0}} \frac{[\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{|w|=r_0} \frac{\Psi_1'(w)\, w^k}{\Psi_1(w) - z} dw \qquad \dots (10)$$

لتكن U منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي، محاطة بمنحنيي جوردان محدودي الطول Γ_1 و Γ_2 وليكن ω وزن على $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$. نرمز بالرمز $E^1(U)$ لأسرة جميع الدوال التحليلية على U يُعرف فضاء دوال سميرنوف أورليتش الموزن $E_M(U,\omega)$ في المنطقة ثنائية الترابط بالعلاقة الآتية:

$$E_M(U,\omega) = \{f \in E^1(U);\ \ f \in L_M(\Gamma,\omega)\ \}$$

إن الفضاء $E_M(U,\omega)$ مع النظيم الآتي:

$$\|f\|_{E_M(U,\omega)} = \|f\|_{L_M(\Gamma,\omega)}$$

يُعرّف فضاء باناخ.

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ثنائية الترابط فهي تقبل النشر في متسلسلة فابير – لورنت الآتية:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_k\, \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) \quad \dots (11)$$

حيث الأمثال c_k و $\tilde{c}_k$ تعطى بالعلاقتين الآتيتين:

$$\left.\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{|w|=\rho_1} \frac{f\big(\Psi(w)\big)}{w^{k+1}} dw; \quad 1 < \rho_1 < \rho_0, \qquad k = 0,1,2,3,\dots \\ \tilde{C}_k &= \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{|w|=r_1} \frac{f\big(\Psi_1(w)\big)}{w^{k+1}} dw; \quad 1 < r_1 < r_0, \qquad k = 1,2,3,\dots \end{aligned}\right\} (12)$$

هذا الأمر يتجلى بأخذنا للعلاقة:

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

وهذا يعني أنه لنشر الدالة f يكفي نشر كل من الدالتين f^+ و f^-

فإذا كانت $f \in E_M(U,\omega)$ فإن $f \in E^1(U)$ ولدينا :

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad ; z \in U$$

بإجراء التحويل $\xi = \Psi(w)$ نجد أنَّ:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho_1} \frac{f\big(\Psi(w)\big)\,\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw$$

بالاستفادة من العلاقة (5) يكون:

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho_1} \frac{f\big(\Psi(w)\big)}{w^{k+1}} dw\right] F_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, F_k(z)$$

كذلك لدينا:

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \quad ; z \in U^-$$

بإجراء التحويل $\xi = \Psi_1(w)$ نجد أن:

$$f^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1}\frac{f\big(\Psi_1(w)\big)\ \Psi_1'(w)}{\Psi_1(w)-z}dw$$

بالاستفادة من العلاقة (8) يكون:

$$f^{-}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1}\frac{f\big(\Psi_1(w)\big)}{w^{k+1}}dw\right]\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_k\tilde{F}_K\left(\frac{1}{z}\right)$$

وبالتالي يكون:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kF_K(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_k\tilde{F}_K\left(\frac{1}{z}\right)$$

إذا أخذنا المجموع الجزئي للمتسلسلة نحصل على الدالة الكسرية الآتية:

$$R_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n}C_kF_K(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\tilde{F}_K\left(\frac{1}{z}\right)\quad\ldots(13)$$

الدالة $R_n(f,z)$ تدعى المجموع الجزئي لمتسلسلة فابير – لورنت من الدرجة n للدالة f.

ومن أجل تقدير الفروق بين الدالة f وتقريباتها سنستخدم معامل الملوسة من المرتبة r والمعرف كما يلي:

تعريف (11)[21]: ليكن $0<\alpha_M<\beta_M<1$ و $\omega\in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(T)\cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(T)$ عندئذٍ لكل $g\in L_M(T,\omega)$ فإن الدالة المعرفة بالعلاقة:

$$\Omega_{M,\omega}^{r}(g,\delta)=\sup_{0<h_i\le\delta}\left\|\prod_{i=1}^{r}\left(I-\sigma_{h_i}\right)\right\|_{L_M(T,\omega)}$$

تدعى معامل الملوسة من المرتبة r للدالة $g\in L_M(T,\omega)$ حيث I المؤثر المطابق، والمؤثر $\sigma_{h(g)}(w)$ يُعرف بالعلاقة

$$\sigma_{h(g)}(w)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}g\big(we^{it}\big)dt\quad;0<h<\pi,w\in T$$

إن دالة معامل الملاسة $\Omega_{M,\omega}^{r}(g,.)$ هي دالة مستمرة وغير سالبة وتحقق:

1) $\lim\limits_{\delta\to0}\Omega_{M,\omega}^{r}(g,\delta)=0$

2) $\Omega_{M,\omega}^{r}(g+g_1,.)\le\Omega_{M,\omega}^{r}(g,.)+\Omega_{M,\omega}^{r}(g_1,.);\forall g,g_1\in L_M(T,\omega)$

ومن المعلوم أنه إذا كان Γ ديني – أملس فإنه يوجد ثوابت C_1,C_2,C_3,C_4 بحيث يتحقق

$$0<C_1\le|\varphi'(z)|\le C_2<\infty\quad;z\in G^{-}$$
$$0<C_3\le|\Psi'(w)|\le C_4<\infty\quad;\ |w|\ge1\qquad(14)$$

ليكن $\Gamma_i(i=1,2)$ منحني ديني – أملس و ω دالة وزن على $\Gamma_1\cup\Gamma_2^{-}$ ونربط مع ω وزنان معرفان على T كالآتي:

$$\omega_0(w)=\omega(\Psi(w))\ ,\quad \omega_1(w)=\omega(\Psi_1(w))$$

وليكن:

$$f_1(w) = f(\Psi_1(w))\ ,\ \ f_0(w) = f(\Psi(w))$$

عندئذٍ من العلاقة (*14*) يكون:

$$f_0 \in L_M(T, \omega_0)\ ,\quad f_1 \in L_M(T, \omega_1)$$

ليكن $f \in E_M(U, \omega)$ عندئذٍ الدالة $f_0(w) = f(\Psi(w))$ تنتمي إلى $L_M(T, \omega_0)$ كما أن

$$f_0^+ \in E_M(D, \omega_0), \qquad f_0^- \in E_M(D^-, \omega_0)$$

علاوة على ذلك يكون لدينا :

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w) \quad \ldots (15)$$

و $f_0^-(\infty) = \infty$ وبطريقة مشابهة يكون لدينا من أجل $f_1 \in L_M(T, \omega_1)$ فإن:

$$f_1^+ \in E_M(D, \omega_1), \qquad f_1^- \in E_M(D^-, \omega_1)$$

بحيث أن $f_1^-(\infty) = 0$، ويتحقق أيضاً :

$$f_1(w) = f_1^+(w) - f_1^-(w) \ldots (16)$$

من أجل الوصول إلى غايتنا في هذا البحث سنستخدم مبرهنة مساعدة يتم فيها تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن المعرفة على دائرة الواحدة بالمجموع الجزئي لمتسلسلة ماكلوران

مبرهنة مساعدة(*4*) [21]: ليكن $0 < \alpha_M < \beta_M < 1$ و $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(T)$ و $g \in E_M(D, \omega)$ إذا كان $\sum_{k=0}^{n} C_k w^k$ المجموع الجزئي لمتسلسلة ماكلوران للدالة g عندئذٍ يوجد ثابت $C_5 > 0$ بحيث أنَّ:

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, w^k \right\|_{L_M(T,\omega)} \le C_5 \Omega_{M,\omega}^r \left(g, \frac{1}{n+1} \right), \forall n \in \mathbb{N}$$

• يُهدف هذا العمل إلى تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن $f \in E_M(U, \omega)$ بالدالة الكسرية $R_n(f, z)$ المعرفة بالعلاقة (13) ولما كان

$$\|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le \ \|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} + \ \|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$

فإننا سنقوم أولاً بتقريب الدالة f بالدالة الكسرية $R_n(f, z)$ على المنحني Γ_1 وذلك من خلال المبرهنة الآتية :

مبرهنة (*1*) : لتكن U منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيي ديني أملسين $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ وليكن $E_M(U, \omega)$ فضاء سميرنوف أورليتش الموزن، إذا كانت $r \in \mathbb{N}$ و $f \in E_M(U, \omega)$ فإنه من أجل أي عدد طبيعي n يوجد ثابت موجب C_6 ودالة كسرية $R_n(f, z)$ بحيث يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_6 \left\{ \Omega_{M,\omega}^r \left(f_0, \frac{1}{n+1} \right) \ + \Omega_{M,\omega}^r \left(f_1, \frac{1}{n+1} \right) \ \right\}$$

حيث $R_n(f,.)$ المجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير – لورنت من الدرجة n للدالة f.

البرهان: ليكن $f \in E_M(\Gamma, \omega)$ عندئذٍ: $f_0 \in L_M(T, \omega_0),\ \ f_1 \in L_M(T, \omega_1)$ ويتحقق أيضاً

$$f_0^+ \in E_M(D, \omega_0)\ , f_0^- \in E_M(D^-, \omega_0)$$

وبوضع $\varphi(\xi)$ و $\varphi_1(\xi)$ بدل w في العلاقتين (*14*) و (*15*) على الترتيب نحصل على:

$$f(\xi) = f_0^+\big(\varphi(\xi)\big) - f_0^-\big(\varphi(\xi)\big); \quad \xi \in \Gamma_1 \ldots (17)$$

$$f(\xi) = f_1^+\big(\varphi_1(\xi)\big) - f_1^-\big(\varphi_1(\xi)\big); \quad \xi \in \Gamma_2 \ldots (18)$$

لتكن z نقطة كيفية من $ext\ \Gamma_1$ عندئذٍ من العلاقة (*5*) يكون لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \dots (19)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi - f_0^-(\varphi(z)) \quad \dots (20)$$

لتكن أيضاً z نقطة كيفية من $ext\, \Gamma_2$ عندئذٍ من العلاقتين (*8*) و (*16*) يكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+(\varphi_1(\xi)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k \varphi_1^k(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \dots (21)$$

إذا كانت z نقطة كيفية من $ext\, \Gamma_1$ فإنه حسب مبرهنة كوشي التكاملية للمناطق ثنائية الترابط يكون لدينا:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad \dots (22)$$

ينتج من كون $ext\, \Gamma_1 \subset ext\, \Gamma_2$ أن العلاقات (*20*) و (*21*) و (*22*) محققة من أجل أي z من $ext\, \Gamma_1$ وبالتالي بجمع العلاقتين (*20*) و (*21*) وبالاستفادة من (*22*) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z) - f_0^-(\varphi(z)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_0^+(\varphi(\xi)) - \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(\xi)}{\xi - z}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+(\varphi_1(\xi)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \varphi_1^k(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

بأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما تسعى zإلى z^* من Γ_1 على طول المسارات غير المماسية خارج Γ_1 من أجل كل $z \in \Gamma_1$ نحصل على:

$$f(z^*) - \sum_{k=0}^{n} C_k F_k(z) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$= f_0^+(\varphi(z^*)) - \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z^*) + \frac{1}{2}\left[f_0^+(\varphi(z^*)) - \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z^*)\right]$$
$$+ S_{\Gamma_1}\left[f_0^+(\varphi(z^*)) - \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi^k(z^*)\right]$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+(\varphi_1(\xi)) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \varphi_1^k(\xi)}{\xi - z^*} d\xi$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L_M(\Gamma_1, w)$ لطرفي العلاقة الأخيرة وبتطبيق متراجحة المثلث، نحصل على العلاقة الآتية:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le \frac{3}{2}\left\|f_0^+\left(\varphi(z^*)\right) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z^*)\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} + \left\|S_{\Gamma_1}\left[f_0^+\left(\varphi(z^*)\right) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z^*)\right]\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} + \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, \varphi_1^k(\xi)}{\xi - z^*} d\xi\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \quad \dots (23)$$

وبالاستفادة من محدودية تكامل كوشي الشاذ على المنحني Γ_1 نجد أن:

$$\left\|S_{\Gamma_1}\left[f_0^+\left(\varphi(z^*)\right) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z^*)\right]\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_7\left\|f_0^+\left(\varphi(z^*)\right) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z^*)\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \quad \dots (24)$$

ومن متراجحة منكوفسكي المعممة في الفضاء $L_M(\Gamma_1, \omega)$ لدينا:

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, \varphi_1^k(\xi)}{\xi - z^*} d\xi\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_8\left\|f_1^+\left(\varphi_1(z^*)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, {\varphi_1}^k(z^*)\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \quad \dots (25)$$

من العلاقات *(22)* و *(23)* و *(24)* نحصل على:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_9\left\|f_0^+\left(\varphi(z^*)\right) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z^*)\right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} + C_{10}\left\|f_1^+\left(\varphi_1(z^*)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, {\varphi_1}^k(z^*)\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \quad \dots (26)$$

بإجراء التحويلين $w = \varphi(z^*)$ و $w = \varphi_1(z^*)$ على الطرف الأيمن للمتراجحة نجد أن:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_{11}\left\|f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, w^k\right\|_{L_M(T,\omega_0)} + C_{12}\left\|f_1^+(w) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, w^k\right\|_{L_M(T,\omega_1)}$$

بتطبيق المبرهنة المساعدة *(4)* على حدي الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة، نحصل على التقدير الآتي:

$$\|f-R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le \left\{C_{13}\Omega^r_{M,\omega}\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + C_{14}\,\Omega^r_{M,\omega}\left(f_1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

بوضع $C_6=\max\{C_{13},C_{14}\}$ يكون لدينا:

$$\|f-R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \le C_6\left\{\Omega^r_{M,\omega}\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega^r_{M,\omega}\left(f_1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

الآن سنقوم بتقريب الدالة f بالدالة الكسرية $R_n(f,.)$ على المنحني Γ_2 وذلك من خلال المبرهنة الآتية :

مبرهنة (2): لتكن U منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيي ديني أملسين $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2^-$ وليكن $E_M(U,\omega)$ فضاء سميرنوف أورليتش الموزن، إذا كانت $r\in\mathbb{N}$ و $f\in E_M(U,\omega)$ فإنه من أجل أي عدد طبيعي n يوجد ثابت موجب C_{15} ودالة كسرية $R_n(f,z)$ بحيث يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\|f-R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \le C_{15}\left\{\Omega^r_{M,\omega}\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega^r_{M,\omega}\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

البرهان: لتكن z' نقطة كيفية من $int\,\Gamma_2$ عندئذٍ من العلاقتين (*8*) و (*17*) نجد أنّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(\xi)-f_1^+(\varphi_1(\xi))}{\xi-z'}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi-z'}d\xi \quad \dots(27)$$

وحسب صيغة كوشي التكاملية ومن كون الدالة $f_1^-(\varphi_1(\xi))$ تحليلية في المنطقة U_2^o و z' نقطة من U_2^o فإنَّ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi-z'}d\xi=f_1^-(\varphi_1(\xi)) \quad \dots(28)$$

وبتعويض العلاقة (*28*) في (*27*) ينتج لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(\xi)-f_1^+(\varphi_1(\xi))}{\xi-z'}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi-f_1^-(\varphi_1(\xi)) \quad \dots(29)$$

إذا كانت z' نقطة كيفية من $int\,\Gamma_1$ فإنه من العلاقتين (*5*) و (*17*) لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n}C_kF_k(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi^k(\xi)-f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi-z'}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi-z'}d\xi \qquad \dots(30)$$

حسب صيغة كوشي التكاملية للمناطق غير المحدودة حيث الدالة $f_0^-(\varphi(\xi))$ تحليلية في المنطقة U_1^∞ و z' لا تنتمي إلى U_1^∞ فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi-z'}d\xi = 0 \quad \dots(31)$$

بتعويض العلاقة (31) في (30) يكون لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k F_k(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n} C_k\varphi^k(\xi) - f_0^+\big(\varphi(\xi)\big)}{\xi-z'}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi \quad \dots(32)$$

إذا كانت z' نقطة من U_2^o فإنه حسب صيغة كوشي التكاملية للمناطق ثنائية الترابط يكون لدينا:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z'}d\xi = 0 \quad \dots(33)$$

وينتج من كون $int\,\Gamma_2 \subset int\,\Gamma_1$ أن العلاقات (29) و (30) و (33) محققة من أجل أي نقطة z' من $int\,\Gamma_2$ وبالتالي بجمع العلاقتين (29) و (30) وبالاستفادة من العلاقة (33) نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k F_k(z') + \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z'}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n} C_k\varphi^k(\xi) - f_0^+\big(\varphi(\xi)\big)}{\xi-z'}d\xi$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(\xi) - f_1^+\big(\varphi_1(\xi)\big)}{\xi-z'}d\xi - f_1^-\big(\varphi_1(z')\big) + \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1^k(z')$$

بأخذ نهاية طرفي العلاقة الأخيرة عندما تسعى z' إلى z'' من Γ_2 على طول المسارات غير المماسية داخل Γ_2 ومن ثم بأخذ النظيم في الفضاء $L_M(\Gamma_2,\omega)$ وتطبيق متراجحة المثلث نحصل على العلاقة الآتية:

$$\|f(z'') - R_n(f,z'')\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$
$$\le \frac{3}{2}\left\|f_1^+\left(\varphi_1(z'')\right) - \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1{}^k(z'')\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$
$$+ \left\|S_{\Gamma_2}\left[f_1^+\big(\varphi_1(z'')\big) - \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi^k(z'')\right]\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$
$$+ \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^+\big(\varphi(\xi)\big) - \sum_{k=0}^{n} C_k\,\varphi^k(\xi)}{\xi-z''}d\xi\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \quad \dots(34)$$

بالاستفادة من محدودية تكامل كوشي الشاذ على المنحني Γ_2 نجد أنَّ:

$$\left\|S_{\Gamma_2}\left[f_1^+\big(\varphi_1(z'')\big) - \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1{}^k(z'')\right]\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$
$$\le C_{16}\left\|f_1^+\big(\varphi_1(z'')\big) - \sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k\,\varphi_1{}^k(z'')\right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \quad \dots(35)$$

ومن متراجحة منكوفسكي المعممة في الفضاء $L_M(\Gamma_2,\omega)$ لدينا:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_0^+(\varphi(\xi)) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(\xi)}{\xi - z''} d\xi \right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq C_{17} \left\| f_0^+(\varphi(z'')) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z'') \right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \quad \ldots (36)$$

من العلاقات (*34*) و (*35*) و (*36*) نحصل على:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq C_{18} \left\| f_1^+(\varphi_1(z'')) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, {\varphi_1}^k(z'') \right\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} + C_{19} \left\| f_0^+(\varphi(z'')) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, \varphi^k(z'') \right\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)}$$

بإجراء التحويلين $w = \varphi_1(z''),\ \ w = \varphi(z'')$ على الطرف الأيمن للمتراجحة نجد أنَّ:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq C_{20} \left\| f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} C_k\, w^k \right\|_{L_M(T,\omega_0)} + C_{21} \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k\, w^k \right\|_{L_M(T,\omega_1)}$$

بتطبيق المبرهنة المساعدة (*4*) على حدي الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة نحصل على التقدير الآتي:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq \left\{ C_{22}\Omega_{M,\omega}^r\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + C_{23}\Omega_{M,\omega}^r\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

بوضع $C_{15} = \max\{C_{22}, C_{23}\}$ يكون لدينا:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq C_{15} \left\{ \Omega_{M,\omega}^r\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega_{M,\omega}^r\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

سنعرض الآن المبرهنة الرئيسية في هذا البحث التي تختص بتقريب الدوال العقدية من فضاء دوال سميرنوف أورليتش الموزن إلى دوال كسرية

مبرهنة (*3*): لتكن U منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيي ديني أملسين $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ وليكن $E_M(U,\omega)$ فضاء سميرنوف أورليتش الموزن، إذا كانت $r \in \mathbb{N}$ و $f \in E_M(U,\omega)$ فإنه من أجل أي عدد طبيعي n يوجد ثابت موجب C_{24} ودالة كسرية $R_n(f,z)$ بحيث يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \leq C_{24} \left\{ \Omega_{M,\omega}^r\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega_{M,\omega}^r\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

البرهان: لدينا

$$\|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \leq \|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} + \|f - R_n(f,z)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)}$$

بالاستفادة من المبرهنة (*1*) والمبرهنة (*2*) يكون لدينا:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_1,\omega)} \leq C_6 \left\{ \Omega_{M,\omega}^r\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega_{M,\omega}^r\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma_2,\omega)} \leq C_{15} \left\{ \Omega_{M,\omega}^r\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right) + \Omega_{M,\omega}^r\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

وبوضع $c_{24} = 2\max\{c_6, c_{15}\}$ نحصل على التقدير الآتي:

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le C_{24}\left\{\Omega^r_{M,\omega}\left(f_0, \frac{1}{n+1}\right) \quad + \Omega^r_{M,\omega}\left(f_1 + \frac{1}{n+1}\right)\ \right\}$$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي والمحاطة بمنحنيين ديني أملسين بدوال كسرية.

بوضع $\omega = 1$ في المبرهنة (3) نحصل على نتيجة هامة تخص تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش المعرفة على منطقة ثنائية الترابط ،محاطة بمنحنيين ينتميان إلى أسرة منحنيات ديني الملساء بدوال كسرية ونعرضها فيما يلي

نتيجة: لتكن U منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني ديني–أملس $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ وليكن $E_M(U)$ فضاء سميرنوف أورليتش، إذا كان $f \in E_M(U)$ عندئذ لكل n =1,2,... يوجد ثابت موجب C_{25} بحيث أن :

$$\|f - R_n(f,.)\|_{L_M(\Gamma)} \le C_{25}\left\{\Omega^r_{M,1}\left(f_0, \frac{1}{n+1}\right) \quad + \Omega^r_{M,1}\left(f_1 + \frac{1}{n+1}\right)\ \right\}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا المقال إلى تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي ومحاطة بمنحنيين ديني أملسين بدوال كسرية، كما نوصي بمتابعة هذا العمل بدراسة تقريب دوال فضاء سميرنوف أورليتش الموزن على منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بمنحني كارلسون ومتابعة دراسة تقريب دوال بعض الفضاءات الموزنة كفضاء موري الموزن على مناطق متعددة الترابط .

References

[1] ORLICZ. W. (1932), *über eine gewisse klasse von Räumen vom Typus B, Bull. Intern.De l'Acad.* Pol, serie A, Cracovie, zentralblatt, Vol.6.

[2] ISRAFILOV, D. GUVEN, A. (2005*), Rational approximation in orlicz spaces on Carleson curves. Bull. Belg. Math*. Soc. 12, 223-234

[3] ISRAFILOV, D. GUVEN, A. (2006), *approximation by trigonomet polynomials in weighted orlicz spaces,* studia mathematica 174(2).

[4] AKGUN, R. and ISRAFILOV, D.(2008), *Approximation and moduli of fractional orders in smirnov-orlicz classes, GLASNIK MATEMATIČ*KI, vol. 43(63):121-136

[5] JAFAROV, S. (2012), *on approximation in weighted smirnov-orlicz classes, Complex variables and Elliptic Equations*, 57(5), 567 – 577

[6] B.T. BILALOV, Y. SEZAR, F.A. ALIZADEN, U. ILDIZ.(2024*), Solvability of Riemann Boundary value problems and Applications to Approximative properties of perturbed Exponential system in Orlicz spaces,* Azrebijan journal of mathematics, 14(1), 2218-6816.

[7] METWALI, M. and CICHOŃ, K.(2024), *Solvability of the product of n. integral equations in orlicz spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series, vol.73(2):171-187.*

.

[8] JAFAROV, S. (2011), *approximation by rational functions in smirnov – orlicz classes, Journal of mathematical analysis and applications*, pp. 870-877.

[9] Ali, M. MAHMOUD, S. and KINJ, A. (2017*), approximation by rational functions in smirnov classes with variable exponent,* Arabian journal Mathematics,vol.69, pp. 79-86.

[10] ALI, M. MAHMOUD, S. KINJ, A. (2018), *Investigation of approximation of complex functions from some generalized complex spaces by polynomials and rational functions,* A Thesis For The Ph.D Degree In Mathematical Anaylsis, Tishreen University.

[11] KINJ, A. (2022). *approximation by rational functions in variable Exponent Morrey – Smirnov classes*. Journal of mathematics, pp.7.

[12] BAKDASH, A. and ABD ALAAL, K. (2016*), the complete continuity of urysohn operator in orlicz space*, Tishreen University journal for Research and scientific studies – Basic sciences series vol. (38), No. (6).

[13] KUFNER, A; JOHN, o; FUCIK, S. 2012, *Functions spaces.* Leyden, The Netherland, Walter de Gruyter, pp. 494.

[14] M.M.RAO, Z.D.REN.(1991).*Theory of orlicz spaces*, Marcel Dekker

[15] V. KOKILASHVILI. (1968). *On Analytic Functions of smirnov – orlicz classes,* studia Mathematica vol.(31),43-59.

[16] A.MARKUSHEVCH, I. A.(1968). *Theory of Analytic Functions. Izdatelstvo Nauk*a, Moscow. Vol. 2, pp.359.

[17] POMMERENKE, C. (1992*), Boundary behavior of conformal maps.Berlin:* Springer.

[18] BOTTCHER,A. and KARLoVICH,Y. (1997). *Carlson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators. Basel: Birkhäuser verlag*.

[19] MALIGRANDA, L.(1985). *Indices and interpolation. Warsaw: polish Academy of sciences.*

[20] ISRAFILOV, D. and AKGUN, R. (2006), *approximation in weighted smirnov-orlicz classes,* Journal of mathematics of Kyoto university, 46(4), 755-770.