مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1) 2025

دراسة زمرة الصفوف للحقل التربيعي $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p^2m^2-4m}\right)$ باستخدام قيم زيتا ديدكند الجزئية

ياسمين غانم *

(تاريخ الإيداع ٣/٩/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ١٦/٢/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى المسائل الهامة في نظرية الأعداد الجبرية وهي زمرة الصفوف لأسر من الحقول التربيعية $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=p^2m^2-4m$ عدد صحيح موجب حر من التربيع، حيث قمنا بوضع حد أدنى لرتبة زمرة هذه الصفوف وأثبتنا أن $\mathcal{O}_K$ واحدية التحليل من أجل قيم محددة لـ m وذلك بالاعتماد على التابع زيتا ديدكند.

الكلمات المفتاحية : الحقل التربيعي الحقيقي، عدد الصف، التابع زيتا ديدكند، قيم زيتا ديدكند الجزئية.

*حاصلة على درجة الماجستير في الرياضيات النظرية – كلية العلوم – جامعة طرطوس– طرطوس سورية.

Study the class group of a number field $\mathbb{Q}(\sqrt{p^2m^2-4m})$ using partial Dedekind zeta values

*** Yasmin Ghanem**

(Received 3/9/2024.Accepted 16/2/2025)

□**ABSTRACT** □

In this paper, we have studied one of the important problems in algebraic number theory which is the class group of the family of real quadratic field $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ where $d=p^2m^2-4m$ is a positive square free integer, where we find lower bound for the class number and proved unique factorization for specific values of m depending on Dedekind zeta function.
Keywords : Real quadratic field, Class Number, Dedekind zeta function, Partial Dedekind zeta values .

*Master’s degree in theoretical Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.

مقدمة :

تعتبر مسألة التحليل الوحيد من المسائل المهمة التي درسها الرياضيون وكانت البداية في ساحة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مع المبرهنة الأساسية في الحساب والتي تنص على أن كل عدد صحيح يكتب بصيغة جداء منتهٍ لأعداد أولية ومن ثم قاموا بتوسيع الحلقة $\mathbb{Z}$ وكان توسيع غاوص $\mathbb{Z}[i]$ بداية التوسيعات التربيعية التي عملوا بها حيث أدخلوا مفهوم العناصر اللامختزلة والعناصر الأولية ومن ثم النظرية الحديثة للحلقات والحقول الجبرية وبشكل خاص البنى الجبرية من الصيغة $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث d عدد صحيح حر من التربيع وبحثوا في الخصائص الجبرية لهذه البنى فيما إذا كانت تحقق ما تحققه الحلقة $\mathbb{Z}$ كخاصة التحليل الوحيد و وجود القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر .

كانت نتيجة أبحاثهم أن تحليل العناصر يكون ممكناً ووحيداً في بعض هذه الساحات وفي بعض الساحات الأخرى غير ممكناً وقد توقع العالم Gauss أنه من أجل $d < 0$ فقط عندما $d \in A$ حيث :

$$A = \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}$$

تكون حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة للحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ واحدية التحليل.

ومن ثم أثبت العالمين Heegner [8] و Stark [12] أن توقع Gauss صحيح بينما من أجل $d > 0$ عدد صحيح حر من التربيع لم يتمكن الباحثون من تحديد الساحات الواحدية وبقيت المسألة مفتوحة فقد تم إثبات وجود عدد لا نهائي من الحقول التربيعية $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ و التي تكون حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة فيها واحدية التحليل ولكن ليس من أجل كل d

و يبقى السؤال : هل يمكن إيجاد شروط معينة لـ d لكي نحكم على حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة للحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ فيما إذا كانت ساحات واحدية التحليل (Unique Factorization Domains UFD) أم لا ؟

لذلك درس الباحثون صيغ مختلفة لـ d واعتمدوا في تحديد رتبة زمرة الصفوف لهذه الحقول عدة طرائق منها: تحليل الإيديالات وحساب قيم التابع زيتا لهذه الصفوف ، الصيغ التربيعية ، المنحنيات الإهليلجية ...

حديثاً في المراجع [9,10,11] تم دراسة زمرة الصفوف لحقول تربيعية من نمط معين.

أهمية البحث وأهدافه:

من المعروف أن التحليل الوحيد لعناصر ساحة جبرية يلزم لحل بعض المعادلات الديوفانتية ولوجود القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر وغيرها من الخصائص الجبرية ولذلك يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة التحليل الوحيد لأسر من الحقول التربيعية.

طرائق البحث ومواده :

في هذا البحث نستفيد من تحليل الإيديال الأولي الرئيسي $\langle p \rangle = p\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ في حلقة الأعداد الجبرية $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ للحقل $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ومن قيم صفوف التابع زيتا ديدكند الجزئية $\xi_{\mathrm{k}}(-1, M)$ في الوصول إلى نتائج تخص رتبة زمرة الصفوف للحقل $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{p^2m^2 - 4m})$.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل الأعداد الجبرية
- $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ حلقة الأعداد الجبرية للحقل K

- $\left(\frac{a}{p}\right)$ رمز ليجندر
- $CL(K)$ زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقل K
- h_K رتبة الزمرة $CL(K)$ للحقل K
- ε عنصر الواحدة الأساسية للحقل التربيعي الحقيقي $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$
- $\mathcal{B}_k$ أعداد برنولي
- $B_n(x)$ كثيرات حدود برنولي
- $\xi_k(s)$ تابع زيتا ديدكند
- $w(m)$ عدد القواسم الأولية لـ m والتي تطابق 1 بالمقاس 4

نذكر فيما يأتي بعضاً من التعاريف والتمهيديات والأفكار التي اعتمدنا عليها في هذا البحث.

تعريف1: [1,4]

ليكن d عدد صحيح حر من التربيع عندئذٍ الحقل الجزئي من $\mathbb{C}$ الذي يحوي المجموعة $\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{d}\}$ يسمى حقل تربيعي ويرمز له بالرمز $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ وتكون عناصره من الصيغة $\alpha=a+b\sqrt{d}$: حيث $a,b\in\mathbb{Q}$ و إذا كان $d>0$ يسمى K حقل تربيعي حقيقي (Real quadratic field) ، وإذا كان $d<0$ يسمى K حقل تربيعي تخيلي (Complex quadratic field) ، وتسمى عناصر الحقل التربيعي أعداد جبرية تربيعية .

- إن حلقة الأعداد الجبرية $\mathcal{O}_K$ تعطى بالصيغة :

$$\mathcal{O}_K=\begin{cases}\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & if \quad d\equiv 1(mod\ 4)\\ \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] & if \quad d\not\equiv 1(mod\ 4)\end{cases}$$

- إن مميز الحقل $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ يعطى بالصيغة :

$$\Delta_K=\begin{cases}d & if \quad d\equiv 1(mod\ 4)\\ 4d & if \quad d\not\equiv 1(mod\ 4)\end{cases}$$

تعريف 2: [1]

ليكن $\alpha=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ يعرف مرافق العنصر α (Conjugate of α) ويرمز له بالرمز $\bar{\alpha}$ ، بالشكل:

$\bar{\alpha}=a-b\sqrt{d}$ ويعرف نظيم العنصر α (Norm of α) ويرمز له بالرمز $\mathrm{N}(\alpha)$ ، بالشكل:

$$\mathrm{N}(\alpha)=\alpha\,\bar{\alpha}=\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(a-b\sqrt{d}\right)=a^2-db^2$$

ويعرف أثر العنصر α (Trace of α) ويرمز له بالرمز $\mathrm{Tr}(\alpha)$ ، بالشكل :

$$Tr(\alpha)=\alpha+\bar{\alpha}=\left(a+b\sqrt{d}\right)+\left(a-b\sqrt{d}\right)=2a$$

تعريف3:[7]

ليكن K حقلاً تربيعياً عندئذٍ زمرة الواحدات في الحلقة $\mathcal{O}_K$ تعطى بالصيغة التالية:

$$\mathcal{O}_K^{\ *}=\{\alpha\in\mathcal{O}_K\ ;\ |\mathrm{N}(\alpha)|=1\}$$

وفي حال K حقلاً تربيعياً حقيقياً عندئذٍ أصغر واحدة في $\mathcal{O}_K^{\ *}$ أكبر تماماً من 1 تسمى الواحدة الأساسية للحقل K ، ويرمز لها بالرمز ε.

تعريف4:[1]

ليكن K حقل أعداد جبرية ولنرمز بـ $\mathrm{F}(K)$ لزمرة جميع الإيديالات الكسرية المختلفة عن الصفر في $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ و لتكن $P(K)$ مجموعة جزئية منها تحوي جميع الإيديالات الكسرية الرئيسية المختلفة عن الصفر في $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ عندئذٍ: $(P(K)\,,\,.)$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة التبديلية $(F(K)\,,.)$ حيث العملية $(.)$ هي عملية جداء الإيديالات كما أن المساوة $\mathcal{H}\ \mathrm{P(K)} = \mathcal{I}\ \mathrm{P(K)}$ حيث $\mathcal{H},\mathcal{I} \in F(K)$ تعرف علاقة تكافؤ على $\mathrm{F(K)}$ ونكتب $\mathcal{H}\sim\mathcal{I}$.

وعندئذٍ المجموعة:

$$CL(K) = {F(K)}\big/_{P(K)} = \{\mathcal{H}\ P(K)\ ;\ \mathcal{H} \in F(K)\} = \{[\mathcal{H}]\ ;\ \mathcal{H} \in F(K)\}$$

تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جداء الصفوف $(\mathcal{H}\ \mathrm{P}(K))\,(\mathcal{I}\ \mathrm{P(K)}) = (\mathcal{H}\ \mathcal{I})\mathrm{P(K)}$ تسمى بزمرة صفوف تكافؤ الإيديالات واختصاراً زمرة الصفوف للحقل K.

ويرمز لصف الإيديال الرئيسي بالرمز $A = \mathrm{P(K)}$ وهو العنصر الحيادي في $CL(K)$

تمهيدية ١:[1]

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقلاً تربيعياً حيث d عدد صحيح حرّ من التّربيع عندئذٍ:

١. إذا كان $d \equiv 1(mod\ 4)$ فإن $\left\{a,\frac{b+c\sqrt{d}}{2}\right\}$ قاعدة للإيديال $\langle a,\frac{b+c\sqrt{d}}{2}\rangle$ حيث a,b,c أعداد صحيحة و $c \neq 0, a \neq 0$ و $b \equiv c\ (mod\ 2)$ إذا و فقط إذا كان $4ac|(b^2 - dc^2)$, $c|a\ ,c|b$.

٢. إذا كان $d \not\equiv 1(mod\ 4)$ فإن $\{a,b + c\sqrt{d}\}$ قاعدة للإيديال $\langle a,b + c\sqrt{d}\ \rangle$ حيث a,b,c أعداد صحيحة و $c \neq 0, a \neq 0$ إذا وفقط إذا كان $ac|(b^2 - dc^2)$, $c|a\ ,c|b$.

تمهيدية ٢:[1]

ليكن K حقل أعداد من الدرجة n و I إيديال غير صفري في $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ عندئذٍ نظيم الإيديال I يعطى بالصيغة التالية: $\mathrm{N(I)} = \sqrt{\frac{D(I)}{D(K)}}$ و إذا كان $I = \langle\alpha\rangle = \alpha\ \mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ فإن $N(\mathrm{I}) = |\mathrm{N}(\alpha)|$.

تمهيدية ٣:[1]

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقلاً تربيعياً حيث d عدد صحيح حر من التربيع عندئذٍ:

١. إذا كان $d \equiv 1(mod\ 4)$ و a,b,c أعداداً صحيحة و $c \neq 0, a \neq 0$ و $b \equiv c\ (mod\ 2)$ وكان $4ac|(b^2 - dc^2)$, $c|a\ ,c|b$ فإن:

$$N\left(\left(a,\frac{b + c\sqrt{d}}{2}\right)\right) = |ac|$$

٢. إذا كان $d \not\equiv 1(mod\ 4)$ وكانت a,b,c أعداداً صحيحة و $c \neq 0, a \neq 0$ وكان $ac|(b^2 - dc^2)$, $c|a\ ,c|b$ فإن:

$$N\left(\left(a,b + c\sqrt{d}\right)\right) = |ac|$$

تعريف 5: [4]

قيمة a التي يكون من أجلها التطابق $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$ قابل للحل تسمى باقي تربيعي للعدد الأولي الفردي p

يعطى مميز الباقي التربيعي والذي يرمز له برمز ليجندر $\left(\frac{a}{p}\right)$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) = 1 & if \ \ x^2 \equiv a \ (mod\ p) \quad solvable\ and\ gcd(a,p) = 1 \\ \left(\frac{a}{p}\right) = 0 & if \ \ gcd(a,p) = p \\ \left(\frac{a}{p}\right) = -1 & if \quad x^2 \equiv a \ (mod\ p) \quad unsolvable \end{cases}$$

تمهيدية4:[1]

ليكن $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ حقلاً تربيعياً و p عدداً أوليّاً عندئذٍ:

$$\langle p \rangle = \begin{cases} P & if \ \ p > 2 \ , \left(\frac{d}{p}\right) = -1 \ or\ p = 2\ and\ d \equiv 5(mod\ 8) \\ P_1P_2 & if \ \ p > 2 \ , \left(\frac{d}{p}\right) = +1 \ or\ p = 2\ and\ d \equiv 1(mod\ 8) \\ P^2 & if \ \ p > 2 \ , p|d \ or\ p = 2\ and\ d \equiv 2\ , 3(mod\ 4) \end{cases}$$

حيث P_1, P_2, P إيديالات أولية في $\mathcal{O}_K$ و $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ رمز ليجندر .

نظرية1 :[14]

مهما يكن $p \equiv -1(mod\ 4)$ عدد أولي فإنه يوجد عدد صحيح $D_0 = D_0(p)$ بحيث إذا كان

$D = p^2m^2 \pm 4m$ أكبر من D_0 وليس له قاسم من الصيغة k^2 باستثناء $k = 2$ عندئذٍ

عنصر الواحدة الأساسية ε_D للحقل التربيعي الحقيقي $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ يعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_D = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(p^2m \pm 2) + p\sqrt{p^2m^2 \pm 4m}\right] & ;\ D : square - free \\ \frac{1}{2}\left[(p^2m \pm 2) + p\sqrt{\frac{1}{4}(p^2m^2 \pm 4m)}\ \right] & ; \qquad otherwise \end{cases}$$

ويكون $N(\varepsilon) = 1$

تعريف 6 أعداد برنولي:[13]

نرمز لأعداد برنولي بالرمز $\mathcal{B}_n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ وتعطى بالعلاقة:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k = 0\ ;\ \mathcal{B}_0 = 1\ \&\ n \geq 2$$

فتكون $\mathcal{B}_1 = -\frac{1}{2}\ , \mathcal{B}_2 = \frac{1}{6}\ , \mathcal{B}_3 = 0\ ,\ \mathcal{B}_4 = -\frac{1}{30}$

تعريف7 كثيرات حدود برنولي:[13]

نرمز لكثيرات حدود برنولي بالرمز $B_n(x)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ وتعرف بالصيغة:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k x^{n-k}$$

حيث $\mathcal{B}_k$ أعداد برنولي

فتكون $B_0(x) = 1\,, B_1(x) = x - \frac{1}{2}\,, B_2(x) = \frac{6x^2-6x+1}{6}\,, B_3(x) = \frac{2x^3-3x^2+x}{2}$

تعريف8 مجموع ديدكند المعمّم:[2]

ليكن h,c أعداد صحيحة ، $c > 0$ و $gcd\,(h,c) = 1$ عندئذٍ يعرف مجموع ديدكند المعمّم $S_{2n}^{(i)}(h,c)$ حيث

$i = 0,1,2,\ldots.,2n$ بالصيغة الآتية :

$$S_{2n}^{(i)}(h,c) = \sum_{j(mod\ c)} B_i\left(\frac{hj}{c} - \left\lfloor\frac{hj}{c}\right\rfloor\right) B_{2n-i}\left(\frac{j}{c} - \left\lfloor\frac{j}{c}\right\rfloor\right)$$

حيث $\lfloor x \rfloor$ دالة الجزء الصحيح للعدد x و $B_i(x)$ كثيرات حدود برنولي.

في حالة $n = 2$ نحصل على $S_4^{(i)}(h,c)$ واختصاراً $S^{(i)}(h,c)$

$$S^{(i)}(h,c) = S_4^{(i)}(h,c) = \sum_{j(mod\ c)} B_i\left(\frac{hj}{c} - \left\lfloor\frac{hj}{c}\right\rfloor\right) B_{4-i}\left(\frac{j}{c} - \left\lfloor\frac{j}{c}\right\rfloor\right)$$

تمهيدية5: [5,6]

ليكن $m > 0$ عدد صحيح عندئذٍ:

i. $S^3(\pm 1,m) = \pm\frac{-m^4+5m^2-4}{120m^3}$

ii. $S^2(\pm 1,m) = \frac{m^4+10m^2-6}{180m^3}$

تعريف 9 التابع زيتا ديدكند – صف التابع زيتا:[7]

ليكن K حقلاً تربيعياً يعرف تابع زيتا ديدكند بالصيغة:

$$\xi_k(s) := \sum_{I} \frac{1}{\left(N_{K/\mathbb{Q}}(I)\right)^s}$$

حيث $s \in \mathbb{C}$ و $Re\,(s) > 1$ و I إيديال صحيح في K مختلف عن الصفر

ويعرف قيم زيتا ديدكند الجزئية $\xi_k(s\,,H)$ حيث $H \in CL(K)$ بالصيغة التالية:

$$\xi_k(s\,,H) := \sum_{I} \frac{1}{\left(N_{k/\mathbb{Q}}(I)\right)^s}$$

حيث I إيديال صحيح في K مختلف عن الصفر يقع في الصف H.

تمهيدية 6:[7]

$$\xi_k(s) = \sum_{H \in CL(K)} \xi_k(s\,,H)$$

تمهيدية7:[5,6,11]

ليكن K حقلاً تربيعياً حقيقياً مميزه Δ وليكن H صف إيديال في K و I إيديال صحيح في H^{-1} ولتكن $\{r_1\,, r_2\}$ قاعدة صحيحة لِ I ولنعرف $\delta(I) = r_1\, r_2{}' - r_1{}' r_2$ حيث $r_1{}',\ r_2{}'$ مرافقات $r_1\,, r_2$ بالترتيب

وليكن ε الوحدة الأساسية للحقل K ومن ثم $\{\varepsilon\, r_1\,, \varepsilon\, r_2\}$ أيضا قاعدة صحيحة لِ I ولذلك يمكن إيجاد مصفوفة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ عناصرها أعداد صحيحة تحقق:

$$\varepsilon \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

حيث عناصر المصفوفة M تعطى بالصيغة :

$$a = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon}{\delta(I)}\right) \quad , \quad b = Tr\left(\frac{r_1 r_1' \varepsilon'}{\delta(I)}\right)$$
$$c = Tr\left(\frac{r_2 r_2' \varepsilon}{\delta(I)}\right) \quad , \quad d = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon'}{\delta(I)}\right)$$

ويكون $det\,(M) = N(\partial)$ و $bc \neq 0$

✸ في عام 1968 قدم Lang صيغة لحساب قيم $\xi_K(-1,H)$ وهي:

تمهيدية٨:[5,6,11]

بالمحافظة على الرموز في التمهيدية السابقة تعطى صيغة Lang لحساب قيم $\xi_K(-1,H)$ بالعلاقة الآتية:

$$\xi_K(-1,H) = \frac{sgn\,\delta(I) r_2\, r_2'}{360\, N(I) c^3}\{(a+d)^3 - 6(a+d)N(\varepsilon) - 240c^3 sgn\, c\, S^3(a,c) + 180ac^3 sgn\, c\, S^2(a,c) - 240\, c^3\, sgn\, c\, S^3(d,c) + 180dc^3 sgn\, c\, S^2(d,c)\}$$

حيث $N(I)$ نظيم الإيديال I و $S^i(-,-)$ يرمز إلى مجموع ديدكند المعمم المعرف في[12]

وفي عام 1969 توصل Siegel للتعبير عن$\xi_K(1-2n)$ قيم التابع زيتا ديدكند من أجل أعداد صحيحة فردية سالبة حيث n عدد صحيح موجب وتوصل Zagier عام 1976 في [15] إلى قيمة التابع زيتا من أجل $s = -1$ وهي :

تمهيدية9:[15]

ليكن K حقل تربيعي مميزه Δ_k فإن :

$$\xi_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{\substack{|m|<\sqrt{\Delta_k} \\ m^2 \equiv \Delta_k (mod\ 4)}} \sigma_1\left(\frac{\Delta_k - m^2}{4}\right)$$

حيث $\sigma_1(n)$ يرمز إلى مجموع القواسم الموجبة للعدد n.

النتائج والمناقشة :

مبرهنة مساعدة1:

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حقيقي حيث $d = p^2 m^2 - 4m$ عدد صحيح حر من التّربيع و p عدد أولي فردي يحقق $p \equiv -1(mod\ 4)$ وليكن q عدد أولي بحيث $q \equiv 1(mod\ 4)$ و $q|m$ عندئذٍ:

$$\langle q\rangle = \langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2}\rangle^2$$

الإثبات:

لدينا $m \equiv 0(mod\ q) \Leftarrow d \equiv 0(mod\ q) \Leftarrow \left(\frac{d}{q}\right) = 0$

عندئذٍ $\langle q\rangle = P^2$ حيث P إيديال أولي في$\mathcal{O}_K$ وذلك بحسب التمهيدية ٤ ولنثبت أن $P = \langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2}\rangle$

وذلك باستخدام مبرهنة Kummer [3] لتحليل الإيديالات باستخدام كثيرات الحدود:

إن كثيرة الحدود الأصغرية لِ $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ هي $f(x) = x^2 - x - \left(\frac{d-1}{4}\right)$

نلاحظ أن $\frac{d-1}{4} = -m + \frac{p^2m^2-1}{4}$

بما أن $m \equiv 0(mod\ q) \Leftarrow \quad p^2m^2 - 1 \equiv -1 \quad (mod\ q)$

$$\Rightarrow p^2m^2 - 1 \equiv q - 1(mod\ q)$$

$$\Rightarrow \frac{p^2m^2 - 1}{4} \equiv \frac{q-1}{4}(mod\ q)$$

أصبح لدينا:

$$\frac{d-1}{4} \equiv \frac{q-1}{4}(mod\ q)$$

إن كثيرة الحدود $f(x)$ بالمقاس q هي :

$$\overline{f(x)} \equiv x^2 + (q-1)x - \left(\frac{q-1}{4}\right) \quad (mod\ q)$$

$$\equiv x^2 + (q-1)x - \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \quad (mod\ q)$$

$$\equiv \left(x + \frac{q-1}{2}\right)^2 \quad (mod\ q)$$

$$\Rightarrow \langle q\rangle = q\mathcal{O}_{\mathrm{K}} = \langle q, \alpha + \frac{q-1}{2}\rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle q\rangle = q\mathcal{O}_{\mathrm{K}} = \langle q, \frac{q-1}{2} + \frac{1+\sqrt{d}}{2}\rangle^2$$

$$= \langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2}\rangle^2$$

مبرهنة 1:

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقياً حيث $d = p^2\mathrm{m}^2 - 4m$ عدد صحيح حر من التّربيع وليكن p عدد أولي يحقق$p \equiv -1(mod\ 4)$ وليكن A صف الإيديالات الرئيسية للحقل K عندئذٍ :

$$\xi_K(-1, A) = \frac{p^3m^3 - 6pm^2 + p^3m + 10pm - 6p}{360}$$

الإثبات :

إن m عدد فردي حرّ من التّربيع لأنه إذا كان m عدد زوجي فإن $d \equiv 0(mod\ 4)$ وهذا مستحيل لأن d حرّ من التّربيع إذاً $d \equiv 1(mod\ 4)$ ولدينا $\varepsilon = \frac{p^2m-2+p\sqrt{d}}{2}$ عنصر واحدة أساسية للحقل K و$N(\varepsilon) = 1$ وذلك بحسب النظرية ١ ولدينا $\left\{\frac{1+\sqrt{d}}{2}, 1\right\}$ قاعدة لـ$I = \mathcal{O}_K$ أي أن $r_2 = 1$, $r_1 = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ و $\delta(I) = \sqrt{d}$ ومن ثم:

$$a = Tr\left(\frac{r_1r_2'\varepsilon}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{p^2m+p-2}{4} + \frac{p^2m-2+pd}{4d}\sqrt{d}\right) = \frac{p^2m+p-2}{2}$$

$$b = Tr\left(\frac{r_1r_1'\varepsilon'}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{-(1-d)p}{8} + \frac{(1-d)(p^2m-2)}{8d}\sqrt{d}\right) = \frac{(d-1)p}{4}$$

$$c = Tr\left(\frac{r_2r_2'\varepsilon}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{p}{2} + \frac{p^2m-2}{2d}\sqrt{d}\right) = p$$

$$d = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon'}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{p^2m-p-2}{4} + \frac{p^2m-2-pd}{4d}\sqrt{d}\right) = \frac{p^2m-p-2}{2}$$

و بما أن:

- $S^3(a,c) = S^3\left(\frac{p^2m+p-2}{2}, p\right)$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_3\left(\frac{\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)j}{p} - \left\lfloor\frac{\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)j}{p}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_3\left(\frac{\frac{p^2m+p}{2}j - j}{p} - \left\lfloor\frac{\frac{p^2m+p}{2}j - j}{p}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_3\left(\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_3\left(\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p} - \frac{pm+1}{2}j + 1\right) B_1\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_3\left(1 - \frac{j}{p}\right) B_1\left(\frac{j}{p}\right) = S^3(-1,p)$$

بالتالي بالاعتماد على التمهيدية ٥ نجد:

$$S^3(a,c) = -\frac{-p^4+5p^2-4}{120p^3}$$

و بما أن $a \equiv d(mod\ c)$ فإن:

- $S^3(a,c) = S^3(d,c) = -\frac{-p^4+5p^2-4}{120p^3}$

وكذلك:

- $S^2(a,c) = S^2\left(\frac{p^2m+p-2}{2}, p\right)$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_2\left(\frac{\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)j}{p} - \left\lfloor\frac{\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)j}{p}\right\rfloor\right) B_2\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_2\left(\frac{\frac{p^2m+p}{2}j - j}{p} - \left\lfloor\frac{\frac{p^2m+p}{2}j - j}{p}\right\rfloor\right) B_2\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_2\left(\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p}\right\rfloor\right) B_2\left(\frac{j}{p} - \left\lfloor\frac{j}{p}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_2\left(\frac{pm+1}{2}j - \frac{j}{p} - \frac{pm+1}{2}j + 1\right) B_2\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ p)} B_2\left(1 - \frac{j}{p}\right) B_2\left(\frac{j}{p}\right) = S^2(-1,p)$$

بالتالي بالاعتماد على التمهيدية ٥ نجد:

$$S^2(a,c)=\frac{p^4+10p^2-6}{180p^3}$$

و بما أن $a\equiv d(mod\ c)$ فإن :

- $S^2(a,c)=S^2(d,c)=\frac{p^4+10p^2-6}{180p^3}$

فإن:

$$(a+d)^3-6(a+d)N(\varepsilon)=(p^2m-2)^3-6(p^2m-2)$$

- $240\ c^3 sgn\ c\ S^3(a,c) \quad =240\ p^3S^3(-1,p)$
$$=240\ p^3\times\left(\frac{p^4-5p^2+4}{120(p)^3}\right)=2(p^4-5p^2+4)$$
$$=2p^4-10p^2+8$$
- $240\ c^3 sgn\ c\ S^3(d,c) \quad =2p^4-10p^2+8$
- $180ac^3 sgn\ c\ S^2(a,c) \quad =180\times\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)p^3\ S^2(-1,p)$
$$=180p^3\times\left(\frac{p^2m+p-2}{2}\right)\times\left(\frac{p^4+10p^2-6}{180\ p^3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(p^2m+p-2)(p^4+10p^2-6)$$
- $180dc^3 sgn\ c\ S^2(d,c) \quad =180p^3\times\left(\frac{p^2m-p-2}{2}\right)\ S^2(-1,p)$

$$=180p^3\times\left(\frac{p^2m-p-2}{2}\right)\times\left(\frac{p^4+10p^2-6}{180\ p^3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(p^2m-p-2)(p^4+10p^2-6)$$

فنجد بالاستفادة من التمهيدية 8:

$$\xi_K(-1,A)=\frac{sgn\ \delta(I)r_2\ r_2'}{360\ N(I)c^3}\{(a+d)^3-6(a+d)N(\varepsilon)-240\ c^3 sgn\ c\ S^3(a,c)$$
$$+180ac^3 sgn\ c\ S^2(a,c)-240\ c^3\ sgn\ c\ S^3(d,c)$$
$$+180dc^3 sgn\ c\ S^2(d,c)\}$$
$$=\frac{1}{360\ p^3}\{(p^2m-2)^3-6(p^2m-2)-4p^4+20p^2-16$$
$$+(p^2m-2)(p^4+10p^2-6)\}$$
$$=\frac{1}{360\ p^3}\{p^6m^3-6p^4m^2+12p^2m-8-6p^2m+12-4p^4+20p^2-16+p^6m$$
$$+10p^4m-6p^2m-2p^4-20p^2+12\}$$
$$\Longrightarrow \xi_K(-1,A)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}$$

مبرهنة 2:

ليكن $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقياً حيث $d=p^2\mathrm{m}^2-4m$ عدد صحيح حرّ من التّربيع وليكن q عدد أولي

حيث $q \equiv 1(mod\ 4)$ و $m \equiv 0(mod\ q)$ وليكن B صف إيديال ينتمي إليه $I =$ $\langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2} \rangle$ عندئذٍ:

$$\xi_K(-1, B) = \frac{p^3m^3 - 6pm^2 - 6pq^4 + p^3q^4m + 10pq^2m}{360\ q^2}$$

الإثبات:

نلاحظ من المبرهنة المساعدة ١ أن $\langle q \rangle = \langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2} \rangle^2$ ولنأخذ $I = \langle q, \frac{q+\sqrt{d}}{2} \rangle \in B^{-1}$

فتكون $\left\{\frac{q+\sqrt{d}}{2}, q\right\}$ قاعدة صحيحة لـ I أي أن $r_1 = \frac{q+\sqrt{d}}{2}, r_2 = q$ إذاً $\delta(I) = q\sqrt{d}$ ولدينا $\varepsilon = \frac{p^2m-2+p\sqrt{d}}{2}$ فتكون عناصر المصفوفة M هي :

$$a = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{p^2m + qp - 2}{4} + \frac{p^2m - 2 + qpd}{4d}\sqrt{d}\right) = \frac{p^2m + qp - 2}{2}$$

$$b = Tr\left(\frac{r_1 r_1' \varepsilon'}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{-(q-d)p}{8} + \frac{(q-d)(p^2m-2)}{8d}\sqrt{d}\right) = \frac{(d-q)p}{4}$$

$$c = Tr\left(\frac{r_2 r_2' \varepsilon}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{qp}{2} + \frac{q(p^2m-2)}{2d}\sqrt{d}\right) = qp$$

$$d = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon'}{\delta(I)}\right) = Tr\left(\frac{p^2m - qp - 2}{4} + \frac{p^2m - 2 - qpd}{4d}\sqrt{d}\right) = \frac{p^2m - qp - 2}{2}$$

ومن ثم :

- $S^3(a,c) = S^3\left(\frac{p^2m+qp-2}{2}, qp\right)$

$$= \sum_{j(mod\ qp)} B_3\left(\frac{\left(\frac{p^2m+qp-2}{2}\right)j}{qp} - \left\lfloor\frac{\left(\frac{p^2m+qp-2}{2}\right)j}{qp}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{qp} - \left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ qp)} B_3\left(\frac{\frac{p^2m+qp}{2}j - j}{qp} - \left\lfloor\frac{\frac{p^2m+qp}{2}j - j}{qp}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{qp} - \left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ qp)} B_3\left(\frac{pt+1}{2}j - \frac{j}{qp} - \left\lfloor\frac{pt+1}{2}j - \frac{j}{qp}\right\rfloor\right) B_1\left(\frac{j}{qp} - \left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ qp)} B_3\left(\frac{pt+1}{2}j - \frac{j}{qp} - \frac{pt+1}{2}j + 1\right) B_1\left(\frac{j}{qp}\right)$$

$$= \sum_{j(mod\ qp)} B_3\left(1 - \frac{j}{qp}\right) B_1\left(\frac{j}{qp}\right) = S^3(-1, qp)$$

وبالتالي بالاعتماد على التمهيدية ٥:

$$S^3(a,c)=\frac{(qp)^4-5(qp)^2+4}{120(qp)^3}$$

و بما أن $a\equiv d(mod\ c)$ فإن :

- $S^3(d,c)=S^3(a,c)=\frac{(qp)^4-5(qp)^2+4}{120(qp)^3}$

كذلك

- $S^2(a,c)=S^2\left(\frac{p^2m+qp-2}{2},qp\right)$

$$=\sum_{j(mod\ qp)}B_2\left(\frac{\left(\frac{p^2m+qp-2}{2}\right)j}{qp}-\left\lfloor\frac{\left(\frac{p^2m+qp-2}{2}\right)j}{qp}\right\rfloor\right)B_2\left(\frac{j}{qp}-\left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$=\sum_{j(mod\ qp)}B_2\left(\frac{\frac{p^2m+qp}{2}j-j}{qp}-\left\lfloor\frac{\frac{p^2m+qp}{2}j-j}{qp}\right\rfloor\right)B_2\left(\frac{j}{qp}-\left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$=\sum_{j(mod\ qp)}B_2\left(\frac{pt+1}{2}j-\frac{j}{qp}-\left\lfloor\frac{pt+1}{2}j-\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)B_2\left(\frac{j}{qp}-\left\lfloor\frac{j}{qp}\right\rfloor\right)$$

$$=\sum_{j(mod\ qp)}B_2\left(\frac{pt+1}{2}j-\frac{j}{qp}-\frac{pt+1}{2}j+1\right)B_2\left(\frac{j}{qp}\right)$$

$$=\sum_{j(mod\ qp)}B_2\left(1-\frac{j}{qp}\right)B_1\left(\frac{j}{qp}\right)=S^2(-1,qp)=\frac{(qp)^4+10(qp)^2-6}{180\ (qp)^3}$$

وكذلك :

- $S^2(d,c)=S^2(a,c)=\frac{(qp)^4+10(qp)^2-6}{180\ (qp)^3}$

ومن ثم

- $(a+d)^3-6(a+d)N(\varepsilon)=p^6m^3-6p^4m^2+6p^2m+4$
- $240\ \ c^3sgn\ c\ S^3(a,c)\quad =2((pq)^4-5(pq)^2+4)$
- $240\ c^3sgn\ c\ S^3(d,c)\quad =2((pq)^4-5(pq)^2+4)$
- $180\ a\ c^3sgn\ c\ S^2(a,c)\quad =\left(\frac{p^2m-2+pq}{2}\right)((pq)^4+10(pq)^2-6)$
- $180\ d\ c^3sgn\ c\ S^2(d,c)\quad =\left(\frac{p^2m-2-pq}{2}\right)((pq)^4+10(pq)^2-6)$

فنجد أن:

$$\xi_K(-1,B)=\frac{q^2}{360\ p^3q^4}\{p^6m^3-6p^4m^2+6p^2m+4-4p^4q^4+20p^2q^2-16$$
$$+(p^4q^4+10p^2q^2-6)(p^2m-2)\}$$
$$=\frac{1}{360\ p^3q^2}\{p^6m^3-6p^4m^2+6p^2m-4p^4q^4+20p^2q^2-12+p^6q^4m+10p^4q^2m$$
$$-6p^2m-2p^4q^4-20p^2q^2+12\}$$
$$=\frac{p^3m^3-6pm^2-6pq^4+p^3q^4m+10pq^2m}{360\ q^2}$$

❖ ندرس في هذه المبرهنة الشرط اللازم حتى تكون O_K ساحة واحدية التحليل:

مبرهنة 3:

ليكن $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقياً حيث $d=p^2\mathrm{m}^2-4m$ عدد صحيح موجب حر من التربيع حيث $p\equiv -1(mod\ 4)$ وليكن q عدد أولي حيث$q\equiv 1(mod\ 4)$ و $m\equiv 0(mod\ q)$ ولتكن $\mathcal{O}_K$ واحدية التحليل عندئذٍ:$m\in\{-q,q\}$.

الإثبات :

لدينا $\mathcal{O}_K$ واحدية التحليل عندئذٍ $\xi_K(-1,B)=\xi_K(-1,A)$ حيث A صف الإيديالات الرئيسية للحقل K وBصف إيديال ينتمي إليه $<q,\frac{q+\sqrt{d}}{2}>$حيث $q|m$ عندئذٍ وبالاستفادة من المبرهنتين 1 و2 نجد:

$$\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}$$
$$=\frac{p^3m^3-6pm^2-6pq^4+p^3q^4m+10pq^2m}{360\,q^2}$$
$$\Longrightarrow (q^2-1)p^3m^3+(1-q^2)6pm^2+(1-q^2)p^3q^2m+(q^2-1)6pq^2=0$$

وبما أن $q^2\neq 1$ لأن q عدد أولي فإن المعادلة السابقة تكافئ :

$$p^2m^3-6m^2-q^2p^2m+6q^2=0$$

وبالتالي :$m\in\left\{-q,q,+\frac{6}{p^2}\right\}$ولكن m عدد صحيح بالتالي $m\in\{-q,q\}$.

❖ ندرس في هذه المبرهنة حد أدنى لرتبة زمرة الصفوف للحقل $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{p^2\mathrm{m}^2-4m}\right)$

مبرهنة 4:

ليكن $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي حيث $d=p^2\mathrm{m}^2-4m$ و $p\equiv -1(mod\ 4)$ عندئذٍ

$h_K\geq w(m)+1$ حيث $w(m)$ عدد القواسم الأولية لـ m التي تطابق ١ بالمقاس ٤ و $w(m)\geq 3$.

الإثبات :

ليكن A صف الإيديالات الرئيسية للحقل K عندئذٍ حسب المبرهنة 1:

$$\xi_K(-1,A)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}$$

وليكن $q_i|m$ و $q_i\neq p$ حيث q_i عدد أولي فردي يطابق ١ بالمقاس ٤ من أجل $1\leq i\leq n$

وليكن A_iصف إيديال يحوي $<q_i,\frac{q_i+\sqrt{d}}{2}>$ عندئذٍ بحسب المبرهنة 2:

$$\xi_K(-1,A_i)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m-6p{q_i}^4}{360\,{q_i}^2}$$

✸ إذا كان $\xi_K(-1,A_i)=\xi_K(-1,A)$ فعندئذٍ :

$$\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}$$
$$\Longrightarrow ({q_i}^2-1)p^3m^3-({q_i}^2-1)6pm^2-(1-{q_i}^2)p^3{q_i}^2m+(1-{q_i}^2)6p{q_i}^2=0$$

وبما أن $q_i{}^2 \neq 1$ لأن q_i عدد أولي فإن المعادلة السابقة تكافئ :

$$p^2m^3 - 6m^2 - q_i{}^2p^2m + 6q_i{}^2 = 0$$

ومن ثم: $m = \pm q_i$ وهذا مرفوض لأن $w(m) \geq 3$ إذاً $\xi_K(-1, A) \neq \xi_K(-1, A_i)$ أي أن $A \neq A_i$ من أجل $1 \leq i \leq n$

✸ إذا كان $\xi_K(-1, A_i) = \xi_K(-1, A_j)$ حيث $i \neq j$ فإن :

$$\frac{p^3m^3 - 6pm^2 + p^3q_i{}^4m + 10pq_i{}^2m - 6pq_i{}^4}{360\, q_i{}^2} = \frac{p^3m^3 - 6pm^2 + p^3q_j{}^4m + 10pq_j{}^2m - 6pq_j{}^4}{360\, q_j{}^2}$$

$$(q_j{}^2 - q_i{}^2)p^3m^3 - (q_j{}^2 - q_i{}^2)6pm^2 - (q_j{}^2 - q_i{}^2)p^3q_i{}^2q_j{}^2m + (q_j{}^2 - q_i{}^2)6pq_i{}^2q_j{}^2 = 0$$

وبما أن $q_i{}^2 \neq q_j{}^2$ فإن المعادلة السابقة تكافئ:

$$p^2m^3 - 6m^2 - q_i{}^2q_j{}^2p^2m + 6q_i{}^2q_j{}^2 = 0$$

ومن ثم : $m = \mp q_iq_j$ وهذا مرفوض لأن $w(m) \geq 3$

إذاً $\xi_K(-1, A_i) \neq \xi_K(-1,, A_j)$ أي أن $A_j \neq A_i$ من أجل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ و $i \neq j$.

إذاً مجموعة الصفوف $\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ هي مجموعة صفوف إيديالات غير رئيسية مختلفة .

مما سبق نجد أن $h_K \geq w(m) + 1$.

❖ ندرس في هذه المبرهنة الشرط اللازم والكافي لكي تساوي رتبة زمرة الصفوف العدد $w(m) + 1$

مبرهنة 5 :

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي حيث $d = p^2\mathrm{m}^2 - 4m$ و $p \equiv -1(mod\ 4)$

عندئذٍ $h_K = w(m) + 1$

حيث $\mathrm{w}(m)$ عدد القواسم الأولية لـ m التي تطابق ١ بالمقاس ٤ و $w(m) \geq 3$ إذا وفقط إذا كان :

$$\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}} \sigma_1(-m + bpm - b^2) = \frac{p^3m^3 - 6pm^2 + p^3m + 10pm - 6p}{12} + \sum_{i=1}^{w(m)} \frac{p^3m^3 - 6pm^2 + p^3q_i{}^4m + 10pq_i{}^2m - 6pq_i{}^4}{12\, q_i{}^2}$$

حيث q_i عدد أولي يقسم m و $q_i \equiv 1(mod\ 4)$ من أجل كل $1 \leq i \leq w(m)$

الإثبات : لدينا بحسب التمهيدية ٩ :

$$\xi_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{\substack{|t| < \sqrt{\Delta_K} \\ t^2 \equiv \Delta_K (mod\ 4)}} \sigma_1\left(\frac{\Delta_K - t^2}{4}\right)$$

حيث Δ_K مميز الحقل K أي $\Delta_K = d = p^2\mathrm{m}^2 - 4m$ لأن $d \equiv 1\ (mod\ 4)$ بالتالي :

$$\xi_K(-1)=\frac{1}{60}\sum_{\substack{|t|<\sqrt{\Delta_K}\\ t^2\equiv\Delta_K(mod\ 4)}}\sigma_1\left(\frac{\Delta_K-t^2}{4}\right)=\frac{1}{60}\sum_{\substack{|t|<\sqrt{p^2\mathrm{m}^2-4m}\\ t^2\equiv 1(mod\ 4)}}\sigma_1\left(\frac{p^2\mathrm{m}^2-4m-t^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{60}\sum_{\substack{|t|<pm-1\\ t\ \ is\ odd}}\sigma_1\left(-m+\frac{p^2\mathrm{m}^2-t^2}{4}\right)=\frac{1}{30}\sum_{\substack{t=1\\ t\ is\ odd}}^{pm-2}\sigma_1\left(-m+\frac{(pm-t)(pm+t)}{4}\right)$$

نستبدل t بـ $pm-r$ حيث r عدد زوجي عندئذٍ:

$$\xi_K(-1)=\frac{1}{30}\sum_{\substack{r=2\\ r\ is\ even}}^{pm-1}\sigma_1\left(-m+\frac{r(2pm-r)}{4}\right)$$

نعوض $r=2b$ لأن r عدد زوجي فيصبح لدينا :

$$\xi_K(-1)=\frac{1}{30}\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}}\sigma_1\left(-m+\frac{2b(2pm-2b)}{4}\right)=\frac{1}{30}\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}}\sigma_1(-m+bpm-b^2)$$

لزوم الشرط : لنفرض أن $h_K=w(m)+1$ فإن $CL(K)=\{A,A_1,A_2,\dots,A_{w(m)}\}$

حيث A صف الإيديال الرئيسي للحقل K و A_i صف إيديال ينتمي إليه $\langle q_i,\frac{q_i+\sqrt{d}}{2}\rangle$ بالتالي بحسب التمهيدية ٦ :

$$\xi_K(-1)=\xi_K(-1,A)+\sum_{i=1}^{w(m)}\xi_K(-1,A_i)$$

$$=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}+\sum_{i=1}^{w(m)}\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m-6p{q_i}^4}{360\ {q_i}^2}$$

عندئذٍ

$$\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}}\sigma_1(-m+bpm-b^2)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{12}+\sum_{i=1}^{w(m)}\frac{p^3m^3+6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m+6p{q_i}^4}{12{q_i}^2}$$

كفاية الشرط : نفرض أن

$$\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}}\sigma_1(-m+bpm-b^2)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{12}+\sum_{i=1}^{w(m)}\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m-6p{q_i}^4}{12{q_i}^2}$$

فإن :

$$\xi_K(-1)=\frac{1}{30}\sum_{b=1}^{\frac{pm-1}{2}}\sigma_1(-m+bpm-b^2)=\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}+\sum_{i=1}^{w(m)}\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m-6p{q_i}^4}{360{q_i}^2}$$

ولدينا $h_K \geq w(m)+1$ وذلك من المبرهنة 4

إذا فرضنا أن $h_K > w(m)+1$ فإنه يوجد على الأقل $w(m)+2$ صف إيديال مختلف، أي أنه يوجد صف إيديال نرمز له مثلاً E بحيث $E \neq A$ و $E \neq A_i$ مهما يكن $1 \leq i \leq w(m)$ وبما أن $\xi_K(-1,E) > 0$ فإن :

$$\xi_K(-1) > \xi_K(-1,A)+\sum_{i=1}^{w(m)}\xi_K(-1,A_i) > \frac{p^3m^3-6pm^2+p^3m+10pm-6p}{360}+\sum_{i=1}^{w(m)}\frac{p^3m^3-6pm^2+p^3{q_i}^4m+10p{q_i}^2m-6p{q_i}^4}{360{q_i}^2}$$

وهذا تناقض مع الفرض.

النتائج والتوصيات:

لقد توصلنا في هذا العمل إلى النتائج التالية:

- شرط لازم لتكون الحلقة $\mathcal{O}_K$ للحقل التربيعي $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{p^2\mathrm{m}^2-4m}\right)$ واحدية التحليل.
- حد أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل التربيعي K حيث $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{p^2\mathrm{m}^2-4m}\right)$
- شرط لازم وكافي لكي تساوي رتبة زمرة صفوف الحقل K عدد معين.

ونوصي بدراسة زمرة صفوف أسر أخرى من الحقول التربيعية ومحاولة إيجاد شرط لازم وكافي لتكون الساحات الجبرية لهذه الأسر واحدية التحليل .

References:

[1]Alaca. S, Williams. K. S., *Introductory algebraic number theory,* Cambridge University Press. New York, 2004.

[2]Barner. K., *Über die Werte der Ringklassen-L- Funktionen reell- quadratis cher Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*. Journal of Number theory, vol. 1, pp. 28–64, 1969.

[3]B. Sury.,*An invitation to algebraic number theory*. Advanced Foundational School II ,Indian Statistical Indstitue, 2007.

[4]Bolker. E. D., Elementary Number Theory, *An Algebraic Approach*, W. A. Bedjamin, Inc. New York, 1970.

[5]Byeon. D., Kim. H. K., *Class number 1 criteria for real quadratic fields of Richaud– Degert typ*e, Journal of Number theory , vol. 57, no. 2, pp. 328–339, 1996.

[6]Byeon. D., Kim. H. K., *Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud– Degert type*, Journal of Number theory, vol. 62, no. 2, pp. 257–272, 1997.

[7]Halter-Koch. F., *Quadratic Irrationals: An introduction to Classical Number Theory*, Taylor & Francis Group, University of Graz Austria, 2013.
[8]Heegner, K., *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*. Math. Z., 56, 227–253,1952.
[9]Issa, A.,Darrag,B., *Partial Dedeknd zeta values for ideal classes of real quadratic field of* $\mathbb{Q}(\sqrt{9m^2+2m})$. Archive der Mathematik,2024.
[10]Mahapatra, N.K., Pandey, P.P., Ram, M.K., *Fields of small class number in the family* $\mathbb{Q}(\sqrt{9m^2+4m})$. *Ramanujan*. J.61,779-798, 2023.
[11]Sankari. H.; Issa. A., *Lower Bound for the Class Number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+4})$, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2020,Article ID 9519613, 2020.
[12]Stark, H. M., *A complete determination of the complex quadratic fields of class number on*e, Michigan Math. J., 14, 1-27,1967.
[13]Larson, N. (2019). *The bernoulli numbers*. A Brief Primer.
[14]Yokoi, H. (1970). *On the fundamental unit of real quadratic fields with norm* 1. Journal of Number theory, 2 (1), 106–115.
[15]Zagier, D. B. (1976). *On the values at negative integers of the zeta function of a real quadratic field*. L'Enseignement Mathématique, 19, 55–95.