مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1)

دراسة الـ PI – حلقات في التدريج وفق نصف زمرة

الدكتورة علياء حكيم*
هلال قيطيم**

(تاريخ الإيداع ٨/ ٩/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٢٣/ ٣/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

لقد قمنا في هذا البحث بدراسة العلاقة بين الحلقة المدرجة وفق نصف زمرة وبين خلايا التدريج وذلك عندما تكون الحلقة المدرجة PI–حلقة أو عندما تكون خلايا التدريج PI– حلقات، حيث قمنا بالتدريج وفق أنواع خاصة من أنصاف الزمر كالشريط النظامي اليساري ونصف الزمرة النظامية تماماً، كما درسنا بعض خواص الحلقات المدرجة العديمة – النقية وعلاقتها بالـ PI– حلقة.

الكلمات المفتاحية: PI– حلقة، حلقة عديمة – نقية، حلقة مدرجة، شريط نظامي يساري، نصف زمرة نظامية تماماً.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلّيّة العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.
** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلّيّة العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية

A Study of *PI*–Rings In Grading By Semigroup

Dr.Alia Hakim*
Hilal Qayteem**

(Received 8/9/2024.Accepted 23/3/2025)

□ABSTRACT □

In this research, we have studied the relationship between graded ring by semigroup and it is grading components and that is when the graded ring is *PI*-Ring Where in this study we have graded the rings by or the components are *PI*-Rings. special types of semigroups such as left regular band and completely regular semigroup. We have also studied some properties of nil-clean graded rings and their relationship to *PI*-Rings.

Keywords: *PI*-Ring, Nil-clean ring, Graded ring**,** Left regular band, Completely regular semigroup.

---

* Teacher, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Univ. of Tartous
** Postgraduate Student (MS), Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Univ. of Tartous

١– مقدمة:

ظهر مفهوم الـ PI– حلقة في عام ١٩٤٨ في بحث [١٢] الذي نشره Kaplansky ، قام بعد ذلك Posner بالتوسع بالمفاهيم التي أوجدها Kaplansky في بحث [١٣] الذي نشره عام ١٩٦٠. توالت بعدها الدراسات حوال الـ PI – حلقة ونشرت العديد من الأبحاث حول هذا الموضوع، كالبحث الذي نشره Kepczyk [٣] عام ٢٠١٦ والذي تناول فيه مجموع حلقتين كل منهما PI– حلقة،

وفي عام ٢٠١٩ توسع Kepczyk في بحث [٢] الذي تناول فيه مجموع لحلقات جزئية كل منها PI– حلقة.

ظهرت فكرة التدريج في الثلاثينات من القرن العشرين، حيث درج بعض الرياضيين الفرنسيين زمرة وفق مونوئيد، ثم قام Matijvic بتدريج الحلقات في بحث [٧] الذي نشره عام ١٩٧٣. يعد A.Kelarev من أهم الرياضيين الذين عملوا في مجال التدريج و نشر العديد من الأبحاث في هذا المجال كالبحث [٤] الذي نشره عام ١٩٩٣ بالتعاون مع J.Okninski حول تدريج الـ PI– حلقة. والجدير بالذكر أن فكرة تدريج الحلقات أثارت اهتمام الرياضيين العرب، حيث دُرس التدريج في بعض الجامعات العربية منها جامعة اليرموك في الأردن و جامعة القاهرة في مصر، وفي سوريا، درس نادر النادر مع سمير سعد (جامعة حلب) تدريج الكثير من الحلقات وفق أنواع معينة من أنصاف الزمر والزمر. ولا تزال الأبحاث و الدراسات مستمرة.

٢– أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة الـ PI– حلقة في التدريج، وإمكانية انتقال خاصية كون الحلقة هي PI– حلقة من الحلقة الأساس المدرجة وفق نصف زمرة إلى بعض (أو كل) الخلايا المدرجة والعكس بالعكس.

تكمن أهمية هذا البحث في الحصول على المزيد من النتائج الهامة في مجال التدريج و الإسهام بتطوير الأبحاث المتعلقة في هذا المجال.

3– تعاريف أساسية:

٣–١ **تعريف [١]:** إن نصف الزمرة (semigroup) ($S,\cdot$) هي مجموعة غير خالية S معرف عليها عملية جبرية ثنائية تجميعية ($\cdot$).

٣–٢ **ملاحظة:** إن كلمة زمرة (نصف زمرة) في ما سيأتي نعني بها زمرة ضربية (نصف زمرة ضربية) إذا لم ننوه صراحةً إلى خلاف ذلك.

٣–٣ **تعريف [٩]:** يُقال عن عنصر e من نصف زمرة S إنه عنصر جامد (Idempotent element) فيها إذا كان $e^2 = e$.

٣–٤ **تعريف [٩]:** يُقال عن نصف زمرة S إنها شريط (Band) إذا كانت جميع عناصرها جامدة.

٣–٥ **تعريف [١]:** يُقال عن شريط S إنه شريط نظامي يساري (Left regular band) إذا حققت عناصره العلاقة الآتية:

$$\forall\ x,y \in S \Rightarrow xyx = xy$$

٣–٦ **تعريف [١]:** لتكن G زمرة جزئية من نصف زمرة S. يُقال إن G زمرة جزئية أعظمية (Maximal Subgroup)

في S إذا لم تكن G محتواة حقيقةً (أو تماماً) في أية زمرة جزئية أخرى من S.

٣–٧ تعريف [١]: يُقال عن نصف زمرة S إنها نصف زمرة نظامية تماماً (Completely regular semigroup)
إذا كان كل عنصر منها ينتمي إلى زمرة جزئية منها.

٣–٨ تعريف [١]: لتكن X مجموعة غير خالية، إن كل تطبيق تقابل من X إلى X يسمى تبديلية لـ X.
إن مجموعة كل التباديل للمجموعة $X=\{1,2,\ldots,n\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية جداء التباديل (أي تركيب التطبيقات) وندعوها الزمرة التناظرية (symmetric group)، ونرمز لها بـ S_n. أي أن S_n مؤلفة من كل التراتيب الممكنة لعناصر المجموعة X.

٣ –٩ تعريف [٩،٤]: يُقال عن حلقة R إنها PI– حلقة (PI–ring) إذا وجدت متطابقة متعددة الخطية من الشكل:

$$x_1x_2\ldots x_n + \sum_{e\neq\sigma\in S_n} K_\sigma\, x_{\sigma_1}\ldots x_{\sigma_n} = 0$$

(S_n هي الزمرة التناظرية و K_σ أعداد صحيحة، e التطبيق المطابق على المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$، $\sigma(i) = \sigma_i$
($\forall\ i = 1,\ldots,n$)). وبحيث أن كل n عنصر من R يحقق تلك المتطابقة.

٣ –١٠ مثال [٢]: إن كل حلقة تبديلية R هي PI– حلقة وذلك لأن:

$$f(x_1,x_2) = x_1\ x_2 - x_2\ x_1 \Rightarrow f(r_1,r_2) = 0\ ,\ \forall\ r_1,r_2\in R$$

٣–١١ تعريف [١٥]: يُقال عن عنصر a من حلقة R إنه شبه نظامي (Quasi–regular) في R إذا وجد في R عنصر b بحيث يكون:

$$a+b = ab = ba$$

ويُقال عن حلقة R إنها شبه نظامية إذا كان كل عنصر من عناصرها شبه نظامي في R .

٣–١٢ تعريف [٩]: يعرف جذر جاكبسون (the Jacobson radical) لحلقة R، والذي يرمز له بـ $J(R)$ ، بأنه أكبر مثالية
شبه نظامية في R .

إذا كانت الحلقة R ذات عنصر وحدة فإن جذر جاكبسون للحلقة R يعرف أيضاً بأنه تقاطع جميع المثاليات الأعظيمة في R **[١٤]**.

٣ –١٣ تعريف [٩]: يُقال عن عنصر b من حلقة R إنه عديم القوى (Nilpotent) إذا وجد عدد صحيح $n \geq 1$ بحيث يكون
$b^n = 0$. ويُقال عن الحلقة R إنها عديمة (Nil) إذا كان كل عنصر من عناصرها عديم القوى.

٣–١٤ تعريف [٥]: لتكن R حلقة ما. يُقال عن العنصر r من R إنه عديم – نقي (Nil – Clean) إذا وجد عنصر جامد $e\in R$ وعنصر عديم القوى $b\in R$ بحيث إن $r = e+b$. إذا كان $eb = be$ عندئذٍ يقال عن العنصر r إنه عديم – نقي – قوي (Strongly – Nil – Clean). ويُقال عن حلقة ما إنها حلقة عديمة – نقية (عديمة – نقية – قوية) إذا كان كل عنصر من عناصرها عديم – نقي (عديم – نقي – قوي).

٣ –١٥ **تعريف [٦]:** يُقال عن عنصر a من حلقة R إنه π – نظامي – قوي (π – Strongly – Regular) إذا كان

$a^n \in R\, a^{n+1} \cap a^{n+1} R$ من أجل عدد طبيعي موجب n. ويُقال عن الحلقة R إنها π – نظامية – قوية إذا كان كل عنصر من عناصرها π – نظامي – قوي.

٣–١٦ **تعريف [١١]:** يُقال عن الحلقة R إنها ٢– عديمة – نقية – قوية (Strongly 2 – Nil – Clean) إذا كان كل عنصر

في الحلقة R يكتب على شكل مجموع لعنصرين جامدين وعنصر عديم القوى، وبحيث تكون هذه العناصر الثلاثة تبادلية فيما بينها.

٣–١٧ **تعريف [١٥,9]:** لتكن R حلقة ما، ولتكن S نصف زمرة. يُقال عن الحلقة R إنها حلقة مدرجة (Grading) وفق S، أو يُقال إن R حلقة S – مدرجة، أو يُقال إن (R,S) تدريج للحلقة R وفق S ، إذا وجدت أسرة زمر جزئية جمعية $\{R_s\}_{s\in S}$ من R تحقق الشرطين:

١– $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$

2– $R_g R_h \subseteq R_{gh} \ \forall\ g,h\in S$

٣–١٨ **تعريف [١٥]:** ليكن (R,S) تدريجاً للحلقة R وفق نصف الزمرة S.

١– نسمي كلاً من R_s $(s\in S)$ خلية متجانسة (Homogeneous cell).

٢– نسمي كل عنصر من الزمرة الجمعية R_s $(s\in S)$ عنصراً متجانساً (Homogeneous element) من البعد s.

٣– إذا كانت $T\subseteq S$ فإننا نرمز لـ $\bigoplus_{t\in T} R_t$ بالرمز R_T .

٣–١٩ **تعريف [١٥]:** ليكن (R,S) تدريجاً للحلقة R وفق نصف الزمرة S، ولتكن I مثالية يسارية (يمينية–ثنائية الجانب) في R. يُقال إن I مثالية يسارية (يمينية–ثنائية الجانب) مدرجة أو متجانسة (Homogeneous ideal) في (R,S) إذا كان

$I = \bigoplus_{s\in S} I_s$ حيث إن $I_s = R_s \cap I$ وذلك من أجل كل s من S.

٣–٢٠ **ملاحظة:** إن التعاريف (٣–١٧)،(٣–18)،(٣–١٩) صحيحة إذا كانت S زمرة.

٣–٢١ **تعريف [٨]:** يُقال عن عنصر متجانس r من حلقة R مدرجة وفق زمرة G، إنه عنصر عديم – نقي – مدرج (عديم – نقي – قوي – مدرج) إذا كان r يكتب بالشكل $r = e + b$ حيث e عنصر جامد متجانس و b عنصر عديم القوى متجانس (وبحيث أن $eb = be$). ويُقال عن حلقة مدرجة R وفق زمرة G، إنها حلقة عديمة – نقية – مدرجة (عديمة – نقية – قوية – مدرجة) إذا كان كل عنصر متجانس منها عديم – نقي – مدرج (عديم – نقي – قوي – مدرج).

٣–٢٢ **ملاحظة:** يبقى التعريف (٣–٢١) صحيحاً في حال كون G نصف زمرة.

4– مبرهنات أساسية:

$g\in G$

4–١ مبرهنة [١٥]: لتكن R حلقة، وS نصف زمرة نظامية تماماً، ولنفرض أن $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ تدريج للحلقة R وفق S، ولتكن $\{G_i\}_{i\in I}$ أسرة كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S. عندئذٍ يكون $\forall_{i\in I}\, R_{G_i}$ حلقة جزئية من R، ويكون $(i\in I)$

$.R = \bigoplus_{i\in I} R_{G_i}$

٤–٢ مبرهنة [١٥]: لتكن R حلقة ذات عنصر وحدة، ولتكن S نصف زمرة نظامية تماماً، ولنفرض أن $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ تدريج للحلقة R وفق S، ولتكن $\{G_i\}_{i\in I}$ اسرة كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S. إذا كانت R_{G_i} $(\forall\ i\in I)$ مثالية في R، فإنه بالإمكان إيجاد مجموعة جزئية $\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$ من I بحيث تكون الزمر الجزئية الأعظمية $G_{r_1}, G_{r_2},\ldots,G_{r_m}$ هي كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S التي من أجلها:

$$R_{G_{r_1}} \neq \{0\} \quad \& \quad R_{G_{r_2}} \neq \{0\} \quad \& \ldots \& \quad R_{G_{r_m}} \neq \{0\}$$

٤–٣ مبرهنة [٣]: لتكن $R_1\ ,\ R_2$ حلقتين جزئيتين من حلقة ما R بحيث أن $R = R_1 + R_2$. إذا كان كلاً من R_1 و R_2 هو PI – حلقة فإن R تكون PI– حلقة.

٤–٤ مبرهنة [٢]: لتكن $R_1\ ,\ R_2\ ,\ R_3$ هي PI– حلقات جزئية من حلقة ما R بحيث إن $R = R_1 + R_2 + R_3$.

إذا كانت $(R_3R_1)^s \subseteq R_3$ و $(R_1R_3)^s \subseteq R_3$ من أجل عدد صحيح ما $s \geq 1$ عندئذٍ تكون R هي PI– حلقة.

٤–٥ مبرهنة [٩,١٠]: لتكن G زمرة منتهية عنصرها الحيادي e، ولتكن $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ تدريج للحلقة R وفق الزمرة G. إذا كانت R_e هي PI – حلقة، فإن R تكون PI– حلقة أيضاً.

4–6 مبرهنة [٤]: لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e، ولتكن $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ هي PI– حلقة مدرجة وفق الزمرة G. إذا كانت $J(R_e)$ عديمة فإن $J(R)$ تكون عديمة ايضاً.

٤–٧ مبرهنة [٤]: لتكن $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ هي PI– حلقة مدرجة وفق زمرة G عنصرها الحيادي e، ولتكن I مثالية متجانسة من R محتواة في $J(R)$. إذا كانت I_e عديمة فإن I تكون عديمة أيضاً.

4–8 مبرهنة [٦]: إذا كانت R حلقة عديمة – نقية فإن $J(R)$ تكون عديمة.

٤–٩ مبرهنة [٨]: لتكن R حلقة مدرجة وفق زمرة G، ولتكن I مثالية متجانسة عديمة من R. عندئذٍ فإن R تكون حلقة عديمة – نقية – مدرجة إذا و فقط إذا كانت R/I حلقة عديمة – نقية – مدرجة.

٤ –١٠ نتيجة [٩]: المجموع المنتهي لـ PI– مثاليات هو PI– مثالية.

٤–١١ نتيجة [8]: كل حلقة عديمة – مدرجة هي حلقة عديمة – نقية – قوية.

٤–١٢ نتيجة [6]: كل حلقة عديمة – نقية – قوية هي حلقة π – نظامية – قوية.

٤–١٣ نتيجة [11]: كل حلقة عديمة – نقية – قوية هي حلقة ٢– عديمة – نقية – قوية.

٥– نتائج العمل:

٥–١ مبرهنة: لتكن $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ حلقة مدرجة وفق شريط نظامي يساري S. إذا كان كلاً من $R_e\ ,\ R_{ef}\ ,\ R_{fe}$ هو

$PI-$ حلقة حيث $e\,,\,f$ عنصران من S، فإن $\acute{R} = R_e + R_{ef} + R_{fe}$ تكون $PI-$ حلقة.

البرهان:

بما أن $e\,,\,ef\,,\,fe$ عناصر جامدة، فإن $R_e\,,\,R_{ef}\,,\,R_{fe}$ حلقات جزئية من R، وبالتالي لبرهان أن $\acute{R}$ حلقة جزئية من R يكفي أن نبرهن أن $\acute{R}$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب على R. لدينا:

$$\forall\ t\,,\,\acute{t} \in \acute{R} \Rightarrow t = x_e + y_{ef} + z_{fe} \quad \& \quad \acute{t} = \acute{x}_e + \acute{y}_{ef} + \acute{z}_{fe}$$

$$\Rightarrow t\,\acute{t} = (x_e + y_{ef} + z_{fe})(\acute{x}_e + \acute{y}_{ef} + \acute{z}_{fe}) = x_e\acute{x}_e + x_e\acute{y}_{ef} + x_e\acute{z}_{fe} + y_{ef}\acute{x}_e + y_{ef}\acute{y}_{ef} + y_{ef}\acute{z}_{fe} + z_{fe}\acute{x}_e + z_{fe}\acute{y}_{ef} + z_{fe}\acute{z}_{fe}$$

ولكن:

$$x_e\acute{x}_e \in R_{ee} = R_e\ ,\ x_e\acute{y}_{ef} \in R_{eef} = R_{ef}\ ,\ x_e\acute{z}_{fe} \in R_{efe} = R_{ef}\ ,\ y_{ef}\acute{x}_e \in R_{efe} = R_{ef}\ ,$$

$$y_{ef}\acute{y}_{ef} \in R_{efef} = R_{eff} = R_{ef}\ ,\ y_{ef}\acute{z}_{fe} \in R_{effe} = R_{efe} = R_{ef}\ ,\ z_{fe}\acute{x}_e \in R_{fee} = R_{fe}\ ,$$

$$z_{fe}\acute{y}_{ef} \in R_{feef} = R_{fef} = R_{fe}\ ,\ z_{fe}\acute{z}_{fe} \in R_{fefe} = R_{fee} = R_{fe}\ .$$

ومنه نجد أن $t\,\acute{t} \in \acute{R}$، وبالتالي فإن $\acute{R}$ حلقة جزئية من R.

بما أن $R_{ef}\,R_e \subseteq R_{efe} = R_{ef}\ \ \&\ \ R_e\,R_{ef} \subseteq R_{eef} = R_{ef}$ ولدينا $R_e\,,\,R_{ef}\,,\,R_{fe}$ هي $PI-$ حلقات فإنه حسب المبرهنة (4–4) فإن $\acute{R}$ تكون $PI-$ حلقة.

٥–٢ نتيجة: لتكن $R = \bigoplus\limits_{s\in S} R_s$ حلقة مدرجة وفق شريط نظامي يساري S. إذا كان كلاً من $R_e\,,\,R_{ef}\,,\,R_{fe}\,,$ R_f هو $PI-$ حلقة، حيث $e\,,\,f$ عنصران من S، فإن $\acute{R} = R_e + R_{ef} + R_{fe} + R_f$ تكون $PI-$ حلقة.

البرهان:

بطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة السابقة نجد أن $\acute{R}$ حلقة جزئية من R، وبما أن $R_e + R_{ef} + R_{fe}$ هو $PI-$ حلقة و R_f هي $PI-$ حلقة، فإن $\acute{R}$ هي $PI-$ حلقة وذلك حسب المبرهنة (٤–٣).

٥–٣ مبرهنة: لتكن R حلقة ذات عنصر وحدة، ولتكن S نصف زمرة نظامية تماماً بحيث أن S اجتماع لزمر جزئية أعظمية منتهية، ولتكن $\{G_i\}_{i\in I}$ أسرة كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S، ولنفرض أن $R = \bigoplus\limits_{s\in S} R_s$ تدريج للحلقة R وفق S، ولتكن $R_{G_i}\ (\forall\ i\in I)$ مثالية في R. إذا كانت R_e هي $PI-$ حلقة من أجل كل عنصر جامد e من S فإن R تكون $PI-$ حلقة.

البرهان:

بما أن $R_{G_i}\ (\forall\ i\in I)$ مثالية في R، فإنه حسب المبرهنة (٤–2) يمكن إيجاد مجموعة جزئية $\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$ من I بحيث تكون الزمر الجزئية الأعظمية $G_{r_1}, G_{r_2},\dots,G_{r_m}$ هي كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S التي من أجلها:

$$R_{G_{r_1}} \neq \{0\} \quad \& \quad R_{G_{r_2}} \neq \{0\} \quad \& \dots \& \quad R_{G_{r_m}} \neq \{0\}$$

ويكون $R = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} R_{G_i}$ حسب المبرهنة (٤–١). لنفرض أن $e_i\ (\forall\ i=1,\dots,m)$ هو العنصر الحيادي في الزمرة G_i، عندئذٍ فإن $R_{e_i}\ (\forall\ i=1,\dots,m)$ تكون $PI-$ حلقة وذلك فرضاً من كون e_i عنصر جامد، وبما أن $G_i\ (\forall\ i=1,\dots,m)$ زمرة منتهية، فإن $R_{G_1},\dots,R_{G_m}$ تكون $PI-$ حلقات، وبما أن $R_{G_1},\dots,R_{G_m}$ مثاليات من R ، فإن R هي مجموع منتهي لـ PI مثالية، ومنه فإن R تكون $PI-$ حلقة حسب النتيجة (٤–١٠).

٥–٤ مبرهنة: لتكن $R = \underset{g\in G}{\oplus} R_g$ حلقة مدرجة وفق زمرة منتهية G عنصرها الحيادي e، ولتكن R_e هي PI – حلقة، ولتكن

$I \subseteq J(R)$ مثالية متجانسة من R بحيث أن I_e عديمة. عندئذٍ فإن R تكون حلقة عديمة – نقية – مدرجة إذا، وفقط إذا، كانت R/I حلقة عديمة – نقية – مدرجة.

البرهان:

$\Leftarrow$): إذا كانت R حلقة عديمة – نقية – مدرجة، فإن الحلقة R/I تكون حلقة عديمة – نقية – مدرجة كصورة هومومورفيزمية مدرجة لـ R.

$\Rightarrow$): لنفرض أن R/I حلقة عديمة – نقية – مدرجة. بما أن G زمرة منتهية و R_e هي PI– حلقة فإن R تكون PI– حلقة وذلك حسب المبرهنة (4–5). لدينا بالفرض $I \subseteq J(R)$ مثالية متجانسة و I_e عديمة، بالتالي حسب المبرهنة (٤–7) تكون I عديمة أيضاً، وبالتالي حسب المبرهنة (٤–٩) فإن R تكون حلقة عديمة – نقية – مدرجة.

٥–٥ نتيجة: لتكن $R = \underset{g\in G}{\oplus} R_g$ هي PI– حلقة مدرجة وفق زمرة G عنصرها الحيادي e ، ولنفرض أن $J(R) = R$. عندئذٍ إذا كانت R_e حلقة عديمة – نقية فإن:

١– R تكون حلقة عديمة – نقية – مدرجة [8].

٢– R تكون حلقة عديمة – نقية – قوية.

٣– R تكون حلقة π – نظامية – قوية.

٤– R تكون حلقة ٢– عديمة – نقية – قوية.

البرهان:

١- بما أن R_e حلقة عديمة – نقية، فإنه حسب المبرهنة (٤–٨) تكون $J(R_e)$ مثالية عديمة، وبما أن R هي PI–حلقة فإن $J(R)$ مثالية عديمة وذلك حسب المبرهنة (٤–٦)، ولكن لدينا $R = J(R)$، وبالتالي فإن R حلقة عديمة، ومنه فإن العناصر المتجانسة في R عديمة القوى، أي أن R حلقة عديمة – مدرجة، ومنه فإن R حلقة عديمة – نقية – مدرجة.

٢– ينتج ذلك بالاعتماد على النتيجة (٤–١١) وعلى برهان (١) وذلك من كون R حلقة عديمة – مدرجة.

٣– ينتج من (٢) ومن النتيجة (٤–12).

٤– ينتج من (٢) ومن النتيجة (٤–13).

٥–٦ مبرهنة: لتكن R هي PI– حلقة، ولتكن S نصف زمرة نظامية تماماً، وليكن $R = \underset{s\in S}{\oplus} R_s$ تدريج للحلقة R وفق S، ولتكن $\{G_i\}_{i\in I}$ أسرة كل الزمر الجزئية الأعظمية المختلفة من S، ولنفرض أن R_{G_i} $(\forall\ i \in I)$ حلقة شبه نظامية. عندئذٍ إذا كانت R_e حلقة عديمة – نقية من أجل كل عنصر جامد e من S فإن R تكون عديمة – نقية – مدرجة.

البرهان:

بما أن R_{G_i} $(\forall\ i \in I)$ حلقة شبه نظامية من R فإن $R_{G_i} = J(R_{G_i})$، وبما أن R هي PI– حلقة فإن R_{G_i} هي

PI– حلقة، وكذلك بما أن R_{e_I} ، حيث e_i العنصر الحيادي في G، هي حلقة عديمة – نقية فإنه حسب النتيجة (١-٥-٥) تكون R_{G_i} حلقة عديمة – نقية – مدرجة، ولكن لدينا $R = \bigoplus_{i\in I} R_{G_i}$ وبالتالي فإن R حلقة عديمة – نقية – مدرجة.

٥–٧ مبرهنة: لتكن $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ حلقة مدرجة وفق نصف زمرة S، إذا كانت R_s $(\forall\ s \in S)$ مثالية من R عديمة – نقية فإن الحلقة R تكون عديمة – نقية.

البرهان: لنبرهن أولاً على أن

$$R_{s_1} R_{s_2} = \{0\} \qquad \forall\ s_1, s_2 \in S$$

لدينا:

$$\forall\ a_1 \in R_{s_1},\ a_2 \in R_{s_2} \Rightarrow a_1 a_2 \in R_{s_1} \ \&\ a_1 a_2 \in R_{s_2} \Rightarrow a_1 a_2 \in R_{s_1} \cap R_{s_2} = \{0\} \Rightarrow a_1 a_2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_{s_1} R_{s_2} = \{0\}$$

ليكن x عنصراً ما من R عندئذٍ فإن x يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in R_{s_i}$$

بما أن R_{s_i} $(\forall\ i = 1, \dots, n)$ حلقة عديمة – نقية، فإن x_i يكتب بالشكل:

$$x_i = e_i + b_i$$

حيث e_i عنصر جامد من R_{s_i} و b_i عنصر عديم القوى من R_{s_i}. وبالتالي فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

إن $\sum_{i=1}^{n} e_i$ عنصر جامد وذلك لأن $R_{s_i} R_{s_j} = \{0\}$ أياً تكن $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. ومنه فإن:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

وكذلك فإن b_i عنصر عديم القوى $(\forall\ i = 1, \dots, n)$ b_i عنصر عديم القوى، لأنه بما أن b_i عنصر عديم القوى، فإنه يوجد عدد صحيح موجب t_i بحيث أن $b_i^{t_i} = 0$، ومنه:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{t_1 + \dots + t_n} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{t_1 + \dots + t_n}$$

وذلك لأن $R_{s_i} R_{s_j} = \{0\}$ أياً تكن $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. ومنه:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{t_1 + \dots + t_n} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{t_i}\, b_i^{t_1 + \dots + t_{i-1} + t_{i+1} + \dots + t_n} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot b_i^{t_1 + \dots + t_{i-1} + t_{i+1} + \dots + t_n} = 0$$

وبالتالي فإن $x=\sum_{i=1}^{n} e_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$ كتب كمجموع لعنصرين أحدهما جامد والآخر عديم القوى ومنه فإن x عنصر عديم – نقي، وبالتالي فإن R حلقة عديمة – نقية.

٥–٨ نتيجة: لتكن R هي PI – حلقة، ولتكن S شريط، وليكن $R=\bigoplus_{s\in S} R_s$ تدريج للحلقة R وفق S، ولنفرض أن R_s $(\forall\ s\in S)$ مثالية شبه نظامية من R. إذا كانت R_s حلقة عديمة – نقية فإن R تكون حلقة عديمة – نقية.

البرهان:

ينتج البرهان من المبرهنة (٥–٦) و المبرهنة (٥–٧)، ومن كون الشريط هو نصف زمرة نظامية تماماً زمرها الجزئية الأعظمية من الشكل $\{s\}$ حيث s عنصر ما من S.

٦– التوصيات والمقترحات:

بما أن للـ PI –حلقات دور هام في الجبر، فقد قمنا بدراسة الـ PI –حلقات في التدريج و حصلنا على عدد من النتائج، ولذا نوصي بتطوير هذه الدراسة عن تدريج الـ PI –حلقات وذلك باستخدام أنواع مختلفة من الزمر و أنصاف الزمر، وذلك للحصول على المزيد من الخواص، ودراسة انتقال هذه الخواص من الحلقة المدرجة إلى خلايا التدريج و بالعكس.

المراجع:

[1] HOWIE.J. M , February , 1995 – *Fundamentals of Semigroup Theory* . University of St Andrews , CLARENDON PRESS. OXFORD

[2] KĘPCZYK. M, 2019, *Rings which are sums of PI subrings*. J. Algebra Appl. 19(8), 2050157.

[3] KĘPCZYK. M, 2016, *A ring which is a sum of two PI subrings is always a PI ring*. Isr. J. Math. 221(1), 481–487.

[4] KELAREV.A.V ; OKNINSKI. J , 1995, *Group graded rings satisfying polynomial identities*, Glasgow Math . J. 37 , 205-210.

[5] KOSAN. T ; WANG. Z and ZHOU. Y, 2016, "*Nil-clean and strongly nil-clean rings*", J. Pure Appl. Algebra 220 (2), 633–646.

[6] DIESL.A.J, 2013, *Nil clean rings*, J. Algebra 383, 197–211.

[7] MATIJEVIC.R. J, 1973, *Some topics in graded rings*, Thesis, University of Chicago.

[8] ILIĆ-GEORGIJEVIĆ. E ; ŞAHINKAYA. S, 2018, *On graded nil clean rings*, Comm. Algebra 46(9), 4079–4089.

[9] KELAREV.A.V, 2002, *Ring Constructions and Applications*, Series in Algebra 9, World Scientific, New Jersy, London, Singapore, Hong Kong.

[10] KELAREV. A.V, 1993, *on semigroup graded PI-algebras* , semigroup forum 47, 294 – 298.

[11] Renas T. M.Salim ; Nazar H. Shuker , 2023, *Strongly 2-Nil Clean Rings with Units of Order Two* , EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS Vol. 16, No. 3, 1675-1684.

[12] KAPLANSKY. I, 1948, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 ,575-580.

[13] POSNER.E.C, 1960, *Prime rings satisfying a polynomial identity*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, 180-183.

[14] LAM.T.Y, November, 1990, *A first course in Noncommutative Rings,* Berkeley, California.

[15] النادر نادر ، سعد سمير ، حكيم علياء ، ٢٠١١ ، *دراسة الحلقات (الجبور) الجزئية* R_G (A_G) *من حلقة* R *(جبر* A*) مدرجة (مدرج) وفق نصف زمرة* S حيث G *زمرة أعظمية من* S – مجلة بحوث جامعة حلب ، سلسلة العلوم الأساسية ، العدد ٧٧.