مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1) 2025

موضوعات الفصل والتراص في الفضاءات ثنائية التبولوجيا

د.عدنان ظريف*
مروه شلاح**

(تاريخ الإيداع ١٢/٨/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٢٦/١/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث بتقديم مفاهيم جديدة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا حيث عرفنا الفضاء ثنائي التبولوجيا $N\alpha-$ منتظم ، وكذلك فضاء $N\alpha-$ عادي ثم عرفنا موضوعتي الفصل $N\alpha-T_4, N\alpha-T_3$ ودرسنا أهم خصائصها كما قدمنا نوعاً جديداً من التراص في الفضاءات ثنائية التبولوجيا وفق مفهوم المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$.

الكلمات المفتاحية: ، فضاء $N\alpha-$ متراص، فضاء $N\alpha-$ منتظم، فضاء $N\alpha-$ عادي ، فضاء$N\alpha-T_3$, فضاء$N\alpha-T_4$

*أستاذ دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**خريجة ماجستير – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريةmarwashallaw941@gmail.com

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1) 2025

Separation Axiom And Compactness In Bitopological Spaces

Adnan Zarif*
Marwa Shallah**

(Received 12/8/2024.Accepted 26/1/2025)

□ABSTRACT □

In this research we presented new concepts in bitopological spaces where we defined the bitopological space $N\alpha$ - regular, and $N\alpha$ - normal. Then we defined a new separation axiom, which are $N\alpha - T_3, N\alpha - T_4$ and studied their most important properties. We also presented a new type of compactness in bitopological spaces, according to the concept of open set of the type Nα.

Keywords : $N\alpha$ −compact space, $N\alpha$ −regular space, , $N\alpha$ −normal space, $Space\ N\alpha - T_3, Space\ N\alpha - T_4$.

*Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Postgraduate of MS in topology, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria
marwashallaw941@gmail.com

مقدمة:

تصنف التبولوجيا على أنها من مواضيع الرياضيات النظرية وبالرغم من ذلك فإنها تدخل في بنية أغلب مواضيع الرياضيات التطبيقية كالمعادلات التفاضلية ونظرية الاحتمالات كما تتغلغل في مختلف العلوم الأخرى كالطب والهندسة وعلم الأحياء والاتصالات ونظم المعلومات الجغرافية والفن والسياسة وقد أولى الباحثون الفضاءات التبولوجية اهتماماً كبيراً ولا سيما الفضاءات ثنائية التبولوجيا والتي تعتبر محور بحثنا هذا .

أدخل $Kelly$ مفهوم الفضاء ثنائي التبولوجيا عام ١٩٦٣ على أنه مجموعة غير خالية مزودة باثنتين من التبولوجيات [6] ، وقد قام العديد من الباحثين بدراسة بعض المفاهيم التبولوجية في الفضاءات ثنائية التبولوجيا فقد قدم $Reilly$ وآخرون مفهوم التراص والتراص عدا [1,12] وكذلك Ma$j$eed قدم مفهوم التراص وفق المجموعات المفتوحة من النمط $R\alpha$ [8] ،كما قدم $Pervin$ مفهوم الترابط في الفضاءات ثنائية التبولوجيا [11].

إضافة إلى ذلك فقد تم تقديم أنماط مختلفة من موضوعات الفصل من قبل Murdeshwar و Naimplly عام ١٩٦٦ [9] و $Reilly$عام ١٩٧٢ [13] و $Almartdi$ و $Alrwini$ في العام ٢٠٢٠ [2].

في العام ٢٠٢٠ دُرست بعض خصائص موضوعات الفصل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا من قبل الباحثين $Alhossain$ و $Roshmi$ [15].

ولأن المجموعات المفتوحة هي حجر الأساس في الفضاءات التبولوجية فقد قام بعض الباحثين بتقديم أنماط مختلفة من المجموعات المفتوحة، مثل المجموعات المفتوحة من النمط N التي عرفها الباحثان $Nasir$ و $Jabbar$ في العام ٢٠١٠ [5] والمجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ والتي عرفها الباحثان $Alhamido$ و $Gharibah$ عام 2017 [4].

أهمية البحث وأهدافه:

الهدف من هذا البحث هو تقديم أنماط جديدة من موضوعات الفصل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا وفق مفهوم المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$، ودراسة بعض خصائصها والعلاقة فيما كما يقدم نوعاً جديداً من التراص في الفضاءات ثنائية التبولوجيا.

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص التبولوجيا ولذا فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات والفضاءات التبولوحية.

نورد فيما يلي بعض الرموز و المصطلحات المستخدمة في البحث :

$\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ، فضاء $N\alpha$ − متراص، فضاء $N\alpha$ − منتظم، فضاء $N\alpha$ − عادي

$N\alpha - cl(A)$ لصاقة المجموعة A من النمط $N\alpha$

تعاريف أساسية ونتائج معروفة :

تعريف 1 [6]:

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما ، ولتكن كل من τ_1، τ_2 تبولوجيا على X عندئذٍ تسمى الثلاثية $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا إذا كان كل من (X, τ_1) و (X, τ_2) فضاءً تبولوجياً .

تعريف 2 [7] :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تدعى المجموعة A الجزئية من X مجموعة مفتوحة($\tau_1\tau_2$ − مفتوحة) في الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ إذا كان $A \in \tau_1 \cup \tau_2$.

وعندئذٍ تدعى A^c (متممة المجموعة A) مجموعة مغلقة في الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$..

تعريف ٣ [2]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ، ولتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ يسمى $(A, \tau_{1A}, \tau_{2A})$ فضاءً جزئياً من الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ حيث $\tau_{1A} = \{U \cap A; U \in \tau_1\}$ و $\tau_{2A} = \{V \cap A; V \in \tau_2\}$

تعريف ٤ [10]:

ليكن $(X، \tau)$ فضاءً تبولوجياً و لتكن A مجموعة جزئية من X يقال عن المجموعة A إنها مجموعة مفتوحة من النمط α (α − مفتوحة) في الفضاء التبولوجي $(X ، \tau)$ إذا تحقق الشرط:

$$A \subseteq int\left(cl\left(int A\right)\right)$$

تعريف 5 [5]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تدعى المجموعة A الجزئية من Xمجموعة مفتوحة من النمط N (N − مفتوحة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا إذا كانت مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X، \tau_1 \vee \tau_2)$ حيث:

$\tau_1 \vee \tau_2$: $is\ supremum\ topology\ on\ X\ contain\ \tau_1, \tau_2$

يرمز لأسرة كل المجموعات المفتوحة من النمط N بالرمز $\mathrm{N} - O(X)$.

تعريف ٦ [4]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تدعى المجموعة A الجزئية من X مجموعة مفتوحة من النمط Nα ($N\alpha$ − مفتوحة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا إذا كانت A مجموعة α − مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X، \tau_1 \vee \tau_2)$.

تدعى متممة المجموعة المفتوحة من النمط Nα مجموعة مغلقة من النمط Nα (Nα − مغلقة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا .

يرمز لأسرة كل المجموعات المفتوحة من النمط Nα بالرمز $\mathrm{N\alpha} - O(X)$.

يرمز لأسرة كل المجموعات المغلقة من النمط Nα بالرمز $\mathrm{N\alpha} - C(X)$.

تعريف 7 [16]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ ، يقال عن A إنها مجاورة من النمط $N\alpha$ للنقطة x من X إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ مثل G بحيث يكون $x \in G \subseteq A$.

يرمز لأسرة جميع المجاورات من النمط $N\alpha$ للنقطة x بالرمز $V_{N\alpha}(x)$.

تعريف ٨ [16]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن أي x من X إنها نقطة لاصقة من النمط Nα بالمجموعة A إذا تحققت العلاقة : $\forall\ v \in V_{N\alpha}(x): v \cap A \neq \emptyset$.

يرمز لأسرة جميع النقاط اللاصقة من النمط $N\alpha$ بالمجموعة A بالرمز $N\alpha - cl(A)$.

تعريف ٩ [17] :

يقال عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha - T_1$ إذا وجد من أجل أي نقطتين مختلفتين x , y من X مجموعتان مفتوحتان من النمط $N\alpha$ مثل U , Vتحققان:

$$x \in U , y \notin U \ and \ x \notin V , y \in V$$

تعريف 10 [17] :

نقول عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha - T_2$ إذا وجد من أجل أي نقطتين مختلفتين x , y من X مجموعتان مفتوحتان من النمط $N\alpha$ مثل U , V تحققان:

$$x \in U , y \in V , U \cap V = \emptyset$$

مبرهنات ونتائج مساعدة:

مبرهنة مساعدة (١) [17] :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة :

١. الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_1$

٢. من أجل أي نقطة x من الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ تكون المجموعة $\{\boldsymbol{x}\}$ مجموعة $N\alpha-$ مغلقة في الفضاء$(X، \tau_1، \tau_2)$.

مبرهنة مساعدة (2) [3]:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذٍ :

أي اجتماع من المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ هو مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

أي تقاطع من المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ هو مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$.

أي اجتماع كيفي من المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ هو مجموعة مغلقة من النمط $N\alpha$.

النتائج والمناقشة:

تعريف1:

نقول عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha$ – منتظم إذا وجد من أجل كل مجموعة $N\alpha$ – مغلقة F وكل $x \notin F$ مجموعتان $N\alpha-$ مفتوحتان u, v بحيث يكون :

$$x \in u , F \subseteq v \ and \ u \cap v = \emptyset$$

تعريف 2 :

نقول عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha - T_3$ إذا كان فضاء $N\alpha$ – منتظم وفضاء$N\alpha - T_1$.

مثال ١ :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا حيث $X = \{a, b, c\}$ و $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$ و $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, b\}\}$عندئذ :

$$N - O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, b\}\}$$
$$N\alpha - O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, b\}\}$$

$$N\alpha - C(X) = \{X, \emptyset, \{b,c\}, \{a\}\}$$

نلاحظ أن الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ هو فضاء $N\alpha$ – منتظم.

تعريف3:

نقول عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha$ – عادي إذا وجد من أجل كل مجموعتين $N\alpha$– مغلقتين وغير متقاطعتين F_1, F_2 مجموعتان $N\alpha$– مفتوحتين U, V حيث :

$$F_1 \subseteq U \,, F_2 \subseteq V \; and \; U \cap V = \emptyset$$

مثال ٢:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا حيث $X = \{a, b, c\}$ و $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$ و $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ عندئذ :

$$N - O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$N\alpha - O(X) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a,b\}\}$$

$$N\alpha - C(X) = \{X, \emptyset, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c\}\}$$

نلاحظ أن الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ هو فضاء $N\alpha$ – عادي.

تعريف 4 :

نقول عن الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X، \tau_1، \tau_2)$ إنه فضاء $N\alpha - T_4$ إذا كان فضاء $N\alpha$ – عادي

وفضاء $N\alpha - T_1$.

مبرهنة (١) :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا بحيث أنه فضاء $N\alpha - T_4$ عندئذٍ يكون الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_3$.

البرهان:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا يحقق موضوعة الفصل $N\alpha - T_4$ ولتكن F مجموعة $N\alpha$ – مغلقة و x نقطة كيفية من F^c عندئذ $\{x\}$ مجموعة $N\alpha$ – مغلقة لأن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_1$ بما أن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – عادي توجد مجموعتان مفتوحتان من النمط $N\alpha$ مثل u, v حيث

$$\{x\} \subseteq u \,, F \subseteq v \; and \; u \cap v = \emptyset$$

ومنه $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – منتظم ويحقق موضوعة الفصل $N\alpha - T_1$ فهو فضاء $N\alpha - T_3$.

نتيجة (١) :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا بحيث أنه فضاء $N\alpha - T_3$ عندئذ الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ هو فضاء $N\alpha - T_2$

البرهان :

ليكن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ ومنه $\{x\}$ مجموعة $N\alpha -$ مغلقة لأن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_1$

و$y \notin \{x\}$ وبما أن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ منتظم توجد مجموعتان $u, v \in N\alpha - O(X)$ حيث :

$$y \in v , \{x\} \subseteq u \ and \ \ u \cap v = \emptyset$$

ومنه $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_2$.

مبرهنة (٢):

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذٍ $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ منتظم إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ وكل $u \in N\alpha - O(X)$ حيث $x \in u$ فإنه توجد مجموعة $v \in N\alpha - O(X)$ تحقق :

$$x \in v \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq u$$

البرهان :

بفرض $x \in X$ و $u \in N\alpha - O(X)$ حيث $x \in u$ ومنه u^c مجموعة $N\alpha -$ مغلقة و $x \notin u^c$

وبما أن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ منتظم بالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان $w, v \in N\alpha - O(X)$

حيث $x \in v, u^c \subseteq w \ and \ v \cap w = \emptyset$

لدينا المجموعة w^c مجموعة $N\alpha -$ مغلقة بالتالي $v \subseteq w^c$ لأن $v \cap w = \emptyset$

$$v \subseteq w^c \Longrightarrow N\alpha - cl(v) \subseteq N\alpha - cl(w^c) \Longrightarrow N\alpha - cl(v) \subseteq w^c$$

$$\Longrightarrow x \in v \subseteq \ N\alpha - cl(v) \subseteq w^c \subseteq u$$

العكس : بفرض F مجموعة $N\alpha -$ مغلقة و $x \in F^c$ بالتالي F^c مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة بالتالي توجد مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة ولتكن v حيث $x \in v \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq F^c$ بالتالي $x \in v$ و

لكن $F \subseteq (N\alpha - cl(v))^c$ مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة

و $(N\alpha - cl(v))^c \cap v = \emptyset$ ومنه الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ منتظم .

نتيجة (2) :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha -$ منتظم عندئذ كل مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة هي مجموعة $N\alpha -$ مغلقة .

البرهان :

بفرض G مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة عندئذٍ حسب المبرهنة (٢) من أجل كل $x \in G$ توجد مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة v_x حيث $x \in v_x \subseteq N\alpha - cl(v_x) \subseteq G$ ومنه $G = \cup \{N\alpha - cl(v_x), x \in G\}$ أي أن المجموعة G عبارة عن اجتماع كيفي من المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ فهي مجموعة $N\alpha -$ مغلقة .

نتيجة (3) :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha -$ منتظم عندئذ من أجل كل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ فإن :

$$N\alpha - cl\{x\} \neq N\alpha - cl\{y\} \Longrightarrow N\alpha - cl\{x\} \cap N\alpha - cl\{y\} = \emptyset$$

البرهان :

بفرض $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وبفرض $N\alpha - cl\{x\} \neq N\alpha - cl\{y\}$ أي أن

$x \notin N\alpha - cl\{y\} \ or \ y \notin N\alpha - cl\{x\}$ بفرض $x \notin N\alpha - cl\{y\}$ بالتالي

لكن $x \in (N\alpha - cl\{y\})^c$ مجموعة $(N\alpha - cl\{y\})^c$ $N\alpha$ – مفتوحة عندئذٍ حسب المبرهنة
(٢) توجد مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة u بحيث $x \in u \subseteq N\alpha - cl(u) \subseteq (N\alpha - cl\{y\})^c$ ومنه
$N\alpha - cl\{x\} \subseteq (N\alpha - cl\{y\})^c$ بالتالي $N\alpha - cl\{x\} \cap N\alpha - cl\{y\} = \emptyset$

مبرهنة (٣) :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha$ – منتظم عندئذ الشروط الآتية متكافئة

١. $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_2$

٢. $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_1$

٣. $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_0$

البرهان :

بوضوح نجد $(1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3)$ لنبرهن $(3) \Leftarrow (1)$

بفرض $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha$ – منتظم ويحقق موضوعة الفصل $N\alpha - T_0$ ولتكن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ عندئذ $y \notin N\alpha - cl\{x\}$ أو $x \notin N\alpha - cl\{y\}$ بفرض $x \notin N\alpha - cl\{y\}$ وبما أن $N\alpha - cl\{y\}$ مجموعة $N\alpha$ – مغلقة و $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – منتظم توجد مجموعتان مفتوحتان من النمط $N\alpha$ مثل u , v حيث $x \in u , N\alpha - cl\{y\} \subseteq v \; and \; u \cap v = \emptyset$ ومنه $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_2$

التراص وفق مفهوم المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$:

تعريف 5:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن A مجموعة جزئية من X ولتكن الأسرة $T = \{B_i \,:\, B_i \in N\alpha - O(X), i \in I\}$ عندئذٍ نقول أن الأسرة T إنها تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة A إذا كان $A \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$.

تعريف 6:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا نقول عن الفضاء $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – متراص إذا وفقط إذا كان من أجل كل تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة X يوجد تغطية جزئية منتهية.

تعريف 7:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن A مجموعة جزئية من X عندئذٍ نقول عن المجموعة A أنها مجموعة $N\alpha$ – متراصة إذا وفقط إذا كان من أجل كل تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة A يوجد تغطية جزئية منتهية أي : A مجموعة $N\alpha$ – متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$if \; A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \,; G_i \in N\alpha - O(X) \; \exists \left\{G_{ij}\right\}_{j=1}^{n} \;\; ; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}$$

مبرهنة ٤:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha - T_2$ ولتكن $x \in X$ ولتكن $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{X}$ مجموعة

$N\alpha -$ متراصة حيث $p \notin H$ عندئذٍ يوجد مجموعتان $U, V \in N\alpha - O(X)$ حيث :

$$H \subseteq U\ , p \in V\ and\ U \cap V = \emptyset$$

البرهان :

لتكن $x \neq p, x \in H$ عندئذٍ مجموعتان $u_x, v_x \in N\alpha - O(X)$ حيث :

$x \in u_x, p \in v_x and\ u_x \cap v_x = \emptyset$ لتكن الأسرة $\{u_x, x \in H\}$ تغطية $N\alpha -$ مفتوحة للمجموعة H

لكن H مجموعة $N\alpha -$ متراصة بالتالي $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} u_{xi}$ بوضع

$U = \bigcup_{i=1}^{n} u_{xi}\ \ , V = \bigcap_{i=1}^{n} v_{xi}$ حيث $H \subseteq U, p \in V$ نلاحظ أن كل من المجموعتين U, V هي مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة لنبرهن أن $U \cap V = \emptyset$:

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} u_{xi}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} v_{xi}\right) = (u_{x1} \cup u_{x2} \cup \ldots \cup u_{xn}) \cap (v_{x1} \cap v_{x2} \cap \ldots \cap v_{xn})$$
$$= (u_{x1} \cap v_{x1}) \cup (u_{x2} \cap v_{x2}) \cup \ldots (u_{xn} \cap v_{xn}) = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \emptyset = \emptyset$$

مبرهنة ٥:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha -$ متراص عندئذٍ كل مجموعة جزئية $N\alpha -$ مغلقة هي مجموعة $N\alpha -$ متراصة .

البرهان :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ متراص ولتكن F مجموعة $N\alpha -$ مغلقة ولتكن الأسرة $\{A_i\}_{i \in I}$ تغطية $N\alpha -$ مفتوحة للمجموعة F أي $F \subseteq \bigcup_{i \in I}\{A_i\}$ بما F مجموعة $N\alpha -$ مغلقة عندئذٍ F^c مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة حيث $X = (F \cup F^c) \subseteq \bigcup_{i \in I}\{A_i\} \cup F^c$

ومنه الأسرة $(\bigcup_{i \in I}\{A_i\} \cup F^c)$ تشكل تغطية

$N\alpha -$ مفتوحة للمجموعة X لكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha -$ متراص ومنه توجد تغطية جزئية منتهية وهي

$\{G_{i1}, G_{i2}, G_{i3} \ldots G_{in}\} \cup F^c$ ومنه $X = \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij} \cup F^c$ لكن $F \cap F^c = \emptyset$ بالتالي

$F \subseteq \left\{\bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}\right\}$ ومنه F مجموعة $N\alpha -$ متراصة.

مبرهنة ٦ :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha - T_2$ عندئذٍ كل مجموعة جزئية $N\alpha -$ متراصة هي مجموعة $N\alpha -$ مغلقة.

البرهان :

بفرض $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا فضاء $N\alpha - T_2$ ولتكن F مجموعة $N\alpha -$ متراصة

لتكن $x \in F^c$ عندئذ حسب المبرهنة (٤) عندئذٍ يوجد مجموعتان $u, v \in N\alpha - O(X)$ حيث :

$x \in u\ , F \subseteq v\ and\ u \cap v = \emptyset$ ومنه $x \in u \subseteq F^c$ بالتالي $F^c = \cup \{u; x \in u, u \in N\alpha - O(X)\}$ بالتالي F^c هي اجتماع مجموعات مفتوحة من النمط $N\alpha$ فهي مجموعة $N\alpha -$ مفتوحة ومنه F مجموعة $N\alpha -$ مغلقة.

مبرهنة ٧:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا $N\alpha$ – متراص وفضاء $N\alpha - T_2$ عندئذٍ هو فضاء $N\alpha$ – عادي.

البرهان :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – متراص وفضاء $N\alpha - T_2$ ولتكن $F_1, F_2 \in N\alpha - C(X)$ حيث $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ بالتالي كل من المجموعتين F_1, F_2 هي مجموعة $N\alpha$ – متراصة حسب المبرهنة (٥)

لتكن $x \in F_2, x \notin F_1$ وكون الفضاء$(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha - T_2$ بالتالي حسب المبرهنة (٤) يوجد مجموعتان $u_x, v_x \in N\alpha - O(X)$ حيث :

$x \in v_x, F_1 \subseteq u_x \; and \; u_x \cap v_x = \emptyset$ وعليه فإن الأسرة $\{v_x; x \in F_2\}$ تشكل تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة F_2 وبما أن F_2 مجموعة $N\alpha$ – متراصة فإنه توجد تغطية جزئية منتهية

$F_2 \subseteq (v_{x1} \cup v_{x2} \cup \ldots \cup v_{xn}) = V$ بوضع $U = \bigcap_{i=1}^{n} u_{xi}$ نجد $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V$ حيث

$V, U \in N\alpha - O(X)$ لنبرهن أن $V \cap U = \emptyset$:

$$U \cap V = (u_{x1} \cap u_{x2} \cap \ldots \cap u_{xn}) \cap (v_{x1} \cup v_{x2} \cup \ldots \cup v_{xn})$$
$$= (u_{x1} \cap v_{x1}) \cup (u_{x2} \cap v_{x2}) \cup \ldots (u_{xn} \cap v_{xn}) = \emptyset$$

بالتالي $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – عادي .

مبرهنة ٨:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – منتظم ولتكن F مجموعة $N\alpha$ – متراصة جزئية من X ولتكن U مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة حيث $F \subseteq U$ عندئذٍ توجد مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة ولتكن v تحقق :

$$F \subseteq v \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq U$$

البرهان :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – منتظم ولتكن U مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة حيث $F \subseteq U$

بفرض $x \in F$ حسب المبرهنة(٢) فإنه توجد مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة ولتكن v_x حيث $x \in v_x \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq U$ وعليه فإن الأسرة $V = \{v_x; x \in F\}$ تشكل تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة F لكن F مجموعة $N\alpha$ – متراصة بالتالي

$$F \subseteq \{\bigcup_{i=1}^{n} v_{xi}\} = v \Longrightarrow F \subseteq v \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq U$$

مبرهنة ٩:

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا $N\alpha$ – منتظم وفضاء $N\alpha$ – متراص هو فضاء $N\alpha$ – عادي

البرهان :

ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء $N\alpha$ – منتظم و $N\alpha$ – متراص ولتكن $F_1, F_2 \in N\alpha - C(X)$ حيث

$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ومنه $F_1 \subseteq {F_2}^c$ ولكن F_2^cمجموعة $N\alpha$ – مفتوحة تحوي مجموعة $N\alpha$ – مغلقة F_1 لكن F_1 مجموعة $N\alpha$ – مغلقة في فضاء $N\alpha$ – متراص فهي مجموعة $N\alpha$ – متراصة حسب المبرهنة (٨) فإنه توجد مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة ولتكن v حيث $F_1 \subseteq v \subseteq N\alpha - cl(v) \subseteq F_2^c$ ومنه نجد أن

$F_2 \subseteq \left(N\alpha - cl(v)\right)^c$ و$F_1 \subseteq v$ و لكن $v \cap \left(N\alpha - cl(v)\right)^c = \emptyset$ و بالتالي $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء $N\alpha$ – عادي .

مبرهنة ١٠:

ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن $A, F \subseteq X$ عندئذ إذا كانت A مجموعة $N\alpha$ – متراصة و F مجموعة $N\alpha$ – مغلقة فإن المجموعة $A \cap F$ هي مجموعة $N\alpha$ – متراصة.

البرهان :

لتكن الأسرة $T = \{G_i, i \in I\}$ تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة $A \cap F$ أي $A \cap F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$

بالتالي $A \cap F \cup F^c \subseteq (\bigcup_{i\in I} G_i) \cup F^c$ $A \subseteq (\bigcup_{i\in I} G_i) \cup F^c \Leftarrow$ لكن F^c مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة وبالتالي الأسرة $\{F^c\} \cup (\bigcup_{i\in I} G_i)$تشكل تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة A لكن A مجموعة $N\alpha$ – متراصة أي يوجد تغطية جزئية منتهية أي

$$A \subseteq \left\{G_{ij}\right\}_{j=1}^{n} \cup F^c \implies A \cap F \subseteq \left\{G_{ij}\right\}_{j=1}^{n} \cup F^c \cap F \implies A \cap F \subseteq \left\{G_{ij}\right\}_{j=1}^{n}$$

بالتالي المجموعة $A \cap F$ هي مجموعة $N\alpha$ – متراصة.

مبرهنة ١١:

ليكن $\left(A، \tau_{1A}، \tau_{2A}\right)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا جزئي من الفضاء $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ عندئذٍ إذا كانت U مجموعة $N\alpha$ – متراصة في الفضاء $\left(A، \tau_{1A}، \tau_{2A}\right)$ فهي مجموعة $N\alpha$ – متراصة في الفضاء $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$

البرهان :

لتكن الأسرة $T = \{G_i, i \in I\}$ تغطية $N\alpha$ – مفتوحة للمجموعة U في الفضاء $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ أي

$$U \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \implies U \cap A \subseteq \left\{\bigcup_{i\in I} G_i\right\} \cap A \implies U \cap A \subseteq \bigcup_{i\in I} \{G_i \cap A\}$$

ومنه $U \cap A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i^*$ حيث $G_i^* = G_i \cap A$ عندئذ فإن المجموعة G_i^* هي مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة في الفضاء $\left(A، \tau_{1A}، \tau_{2A}\right)$ بما أن U مجموعة $N\alpha$ – متراصة في الفضاء $\left(A، \tau_{1A}، \tau_{2A}\right)$ عندئذ

$$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i^* \implies U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \cap A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

ومنه U مجموعة $N\alpha$ – متراصة في الفضاء $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بتقديم أنواع جديدة من موضوعات الفصل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا وهي T_4, T_3 ومنتظم وعادي وفق المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ ودرسنا أهم خصائصها وعلاقتها مع موضوعات فصل معرفة سابقاً كما قدمنا مفهوم الفضاء $N\alpha$ –متراص

نوصي بدراسة مفهومي والاستمرار والترابط وفق المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ في الفضاءات ثنائية التبولوجيا .

المراجع :

[1]- ALobaidi,A.K.L*;On Almost Countably compact of Bitopological Spaces*.AL- Qadisiyah journal for pure science, Vol. 22, NO.1, 2017.

[2]- Arwini.K.A., Almrtadi.H.M., *New pairwise separation axioms in bitopological spaces ,*World scientific news 2020, 31-45.

[٣]- Gharibah,T.;AL-hamido.R.*Study of Multi-Topological Spaces* ,dissertation PHD ,ALbaath University 2019.

[4]-Gharibah.T,Al-hamido,R,*New types of Open Sets and Closed Sets in bitopological space* Babylon jornal of pure&applied sciences .2017.

[5]- Jabbar,N.A.; Nasir,A.*I.Some Types of Commpactness in Bitopological Spaces*, Ibn Al-Haitham J. For pure & Appl.Sci. Vol. 23, 2010,321-327.

[6]- Kelly,J.C.*Bitopological Spaces* .Proce.London Math.Soc.13, 1963,71-89.

[7] – Lellis.M.T. Ravi O; *On Stronger forms of (1, 2)* Quotient Mapping in Bitopological Spaces,* International J . Math. Game theory and Algebra,14 (6),2004, 481- 492.

[8] - Majeed,R.*Rα-compactness on bitopological spaces ,Journal* of Al-Nahrain university,vol.13,No.3,2010,134-137.

[9]- Murdeshwar.M.G and Naimpally.S.A;*Quasi-uniform topological spaces* .Monograph Noordhoff,1966.

[10]- Njastad,O.*On Some Classes of nearly Open Sets* .Pacific J.Math.vol (15) .No(3),1965,961-970.

[11]- Pervin,W.*Connectedness in Bitopological spaces* ,Mathematics .1976.369-372.

[12]- Reilly,I.L;*Bitopological Local Compactness* Mathematics .1972, 407-411.

[13]- Reilly,I.L*;On bitopological separation properties* .Math, Vol(5),1972, 14-25.

[14]- Roshmi ,R. ; Hossain ,M.S. *Properties of Seperation Axiom in Bitopological Space* J.Bangladesh Acad.Sci Vol(43). No(2) ,2019, 191-195 .

[15]- Roshmi.R,Hossain.M ,*Regularty and Normality in Bitopological space ,* innernational journal of scientific research in mathematical and statistical sciences ,V(7),2020,21-24.

[16] – ظريف ، عدنان .، محمود ، سليمان.، شلاح، مروه . *دراسة في بنية الفضاءات ثنائية التبولوجيا* ،مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية ، المجلد(٤٤)، العدد(٢). ٢٠٢٢.

[17] – ظريف ، عدنان .، محمود ، سليمان.، شلاح، مروه . *الفضاءات ثنائية التبولوجيا وبعض تطبيقات التبولوجيا في العلوم الأخرى* ، رسالة ماجستير . ٢٠٢٢ . جامعة تشرين .