

استيفاء كثيرة الحدود للحل العددي لمعادلات فولتيرا، فريدهولم وفولتيرا- فريدهولم التكاملية المجزأة من النوع الثاني باستخدام تقريب برنشتاين

علي جمال شنته *

(تاريخ الإيداع ١٠/٩ / ٢٠٢٤ - تاريخ النشر ١٩/١ / ٢٠٢٥)

□ ملخص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة الحل العددي للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا، فريدهولم وفولتيرا- فريدهولم التكاملية المجزأة من النوع الثاني واستيفاء كثيرة الحدود الخاصة به، للقيام بذلك تم اقتراح طريقة عددية مبنية على كثيرة حدود برنشتاين يتم تطبيقها على الأنماط الثلاثة من المعادلات التكاملية المذكورة لتحويل المعادلة التكاملية إلى نظام خطي من المعادلات يمكن حله جبرياً، والذي بدوره يقودنا إلى الحل التقريبي. تم تطبيق الخوارزمية المقترحة على برنامج Mathematica لإنشاء صيغة موحدة تمكن من إيجاد حل تقريبي لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني، ومعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، وأيضاً معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المجزأة من النوع الثاني، واستيفاء كثيرة الحدود للحل في آن معاً. تم تطبيق عدة أمثلة عددية على الأنواع الثلاثة من المعادلات ومقارنتها مع طرق عددية أخرى ساهمت في حل نفس الأنماط من المعادلات، أظهرت النتائج العددية فعالية الطريقة المقترحة في إيجاد حل تقريبي واستيفاء كثيرة الحدود الخاصة بالحل، وذلك بمقدار خطأ صغير جداً وسرعة كبيرة في الأداء.

الكلمات المفتاحية: معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المجزأة من النوع الثاني، تقريب برنشتاين، الاستيفاء، معادلة فريدهولم التكاملية، معادلة فولتيرا التكاملية.

* حاصل على درجة الماجستير - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سورية.

Polynomial Interpolation of The Numerical Solution of The Volterra, Fredholm, and disjoint Volterra-Fredholm Integral Equations of The Second Kind Using the Bernstein Approximation

Ali Jamal Shanta*

(Received 9/10/2024.Accepted 19/1/2025)

□ABSTRACT □

This paper aims to study the numerical solution of Volterra, Fredholm, and Volterra-Fredholm integral equations of the second kind and its polynomial interpolation. To do this, a numerical method based on Bernstein polynomials was proposed and applied to the three types of integral equations to transform the integral equation into a linear system of equations that can be solved algebraically Leading us to the approximate solution. The proposed algorithm was applied to the Mathematica program to create a unified formula that enables us to find an approximate solution to the Volterra integral equation of the second kind, the Fredholm integral equation of the second kind, and also the disjoint form of the Volterra-Fredholm integral equation of the second kind, and polynomial interpolation of the solution at the same time. Several numerical examples were applied to the three types of equations and compared with other numerical methods that contributed to solving the same kind of equations. The numerical results showed the effectiveness of the proposed method in finding an approximate solution and interpolating the polynomial of the solution, with minimal error and high speed in performance.

Keywords: Disjoint Volterra-Fredholm Integral Equation of The Second Kind, Bernstein Approximation, Interpolation, Fredholm Integral Equation, Volterra Integral Equation.

*Master's degree graduate , Depart of Mathematics , Tartous University , Tartous , Syria.

مقدمة:

المعادلات التكاملية هي المعادلات التي تتضمن دالة مجهولة تظهر تحت إشارة التكامل، تمثل هذه المعادلات أهمية كبيرة على نطاق واسع في مجالات متنوعة من الرياضيات التطبيقية والفيزياء، فهي توفر تقنية قوية لحل مجموعة متنوعة من المسائل العملية [1]. على سبيل المثال تستخدم المعادلات التكاملية في أنظمة التحكم الأمثل [2]، الاقتصاد الرياضي [3] وميكانيكا الموائع [4]، تستخدم معادلة فولتيرا التكاملية في الكثير من التطبيقات الفيزيائية مثل مسألة التوصيل الحراري [5] ومسائل المرونة الكهربائية [6] وغيرها من التطبيقات المهمة، أما معادلة فريدهولم التكاملية فهي تساهم بشكل كبير في حل مسائل القيم الابتدائية ومسائل القيم الحدية، وذلك من خلال تحويلها إلى معادلات تكاملية مكافئة [7]، وأيضاً معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني لها دور كبير في وصف العديد من الظواهر الفيزيائية في مجال المرونة ومسائل الاتصال ومسائل الثوابت المرنة والتوصيل الجزئي [8]، [9] و [10].

قدم الباحثون مؤخراً العديد من الأبحاث التي تقترح طرائق عديدة لحل المعادلات التكاملية، فقد قام Maleknejad و Aghazadeh في [11] بإيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني عن طريق نواة الالتفاف باستخدام منشور متسلسلة تايلور، وفي [12] قام Babolian و Davari بحل المعادلة التكاملية عددياً بناءً على تجزئة أدوميان، كما قام Yusufoglu وآخرون في [13] بتقديم طريقة مبنية على الاستيفاء لحل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية الخطية، وفي [14] تم تقديم طريقة مبنية على نظرية القيمة المتوسطة التكاملية لحل معادلة فريدهولم من النوع الثاني.

اعتمد العديد من الباحثين على كثريات حدود برنشتاين [15] و [16] في إيجاد حل تقريبي للمعادلات التكاملية، كما في [17] حيث تم اقتراح طريقة تجمع بين كثريات حدود برنشتاين المتعامدة وتوابع block-pulse لإيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية، وفي [18] تم الاستفادة من كثريات حدود برنشتاين لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني عددياً، وقام Biazar وآخرون في [19] باستخدام كثريات حدود برنشتاين المتعامدة في حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني عددياً.

في هذا البحث، سيتم الاستفادة من تقريب برنشتاين بشكل مختلف قليلاً عن الأبحاث الأخرى لإنشاء خوارزمية عددية موحدة يتم تطبيقها على لغة البرمجة Mathematica لإيجاد الحل العددي التقريبي للمعادلات التكاملية المختلفة واستيفاء على شكل كثيرة حدود يمكن استخدامها في التطبيقات الأخرى، وذلك نظراً لأهمية كثريات الحدود في المجالات العلمية وسهولة التعامل معها، ليتم بعد ذلك مقارنة النتائج العددية مع نتائج الطرق الأخرى.

في هذا البحث، تم دراسة معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني ذات الصيغة المجزأة التالية: [20]

$$f(x) = g(x) + \alpha \int_a^x k_1(x,t)f(t) dt + \beta \int_a^b k_2(x,t)f(t) dt. \quad (1)$$

وذلك من أجل قيم حقيقية أو عقدية α و β مخالفة للصفر، حيث أن $g(x)$ ، $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ هي توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$.

بفرض $\beta = 0$ في المعادلة (1) نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$f(x) = g(x) + \alpha \int_a^x k_1(x,t)f(t)dt. \quad (2)$$

أيضاً، بفرض $\alpha = 0$ في المعادلة (1) نحصل على معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني بالصيغة التالية:

$$f(x) = g(x) + \beta \int_a^b k_2(x, t) f(t) dt. \quad (3)$$

الفكرة الأساسية للخوارزمية المقترحة هي تبديل الدالة المجهولة f في المعادلة التكاملية بتقريب برنشتاين الخاص بها، والذي سوف يتم تقديمه تالياً، وذلك للحصول على نظام خطي من المعادلات يساعد في الوصول للحل التقريبي للمعادلة التكاملية واستيفاءه على شكل كثيرة حدود.

أهمية البحث وأهدافه: Importance of Research and its Objectives

يهدف هذا البحث إلى تطوير خوارزمية بسيطة وفعالة في آن معاً لإيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا ومعادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا-فريدهولم المجزأة التكاملية من النوع الثاني، وذلك نظراً لشهرتها الواسعة وأهميتها الكبيرة في التطبيقات الرياضية والفيزيائية الحديثة. سيتم أيضاً تطبيق الطريقة على لغة البرمجة Mathematica ضمن خوارزمية موحدة لاستنتاج الحل التقريبي للمعادلات المطروحة واستيفاءه على شكل كثيرة حدود، وذلك لسهولة الاستفادة من كثيرات الحدود في الدراسات الرياضية والتطبيقات المختلفة، سيتم اختبار الفعالية التطبيقية من خلال الرسم البياني ودراسة الخطأ والمقارنة مع نتائج بعض الطرائق الأخرى التي ساهمت في حل نفس النوع من المعادلات.

طرائق البحث ومواده: Methodology

تعتمد طرائق البحث على تقنيات الحل العددي والخوارزميات والبرمجة في Mathematica، كذلك بالإضافة لبعض المفاهيم الرياضية مثل كثيرات حدود برنشتاين والتقريب الخاص بها، كما تم الاطلاع على بعض الأساليب والتقنيات العددية المذكورة في المراجع العلمية الحديثة التي تطرقت لحل مسائل من الأنماط المطروحة.

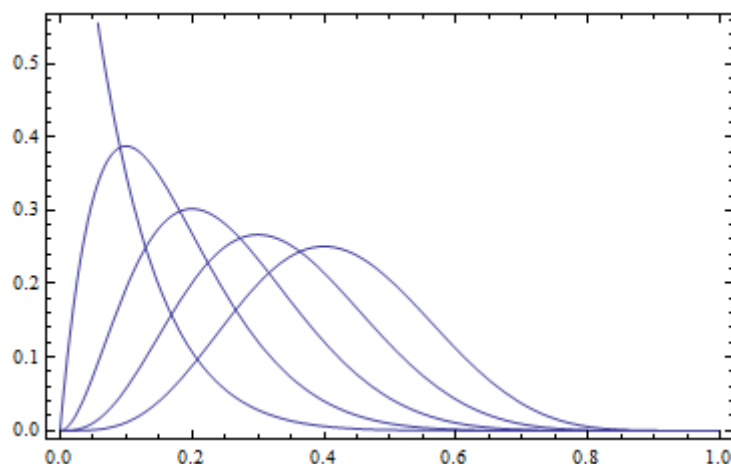
تقريب برنشتاين:

تعد كثيرات الحدود أدوات رياضية مفيدة ومهمة للغاية وذلك بسبب تعريفها البسيط، سرعة حسابها على أنظمة الكمبيوتر وأيضاً قدرتها الكبيرة على تمثيل مجموعة مختلفة من التتابع [21]، حققت كثيرات حدود برنشتاين شهرة واسعة في التطبيقات الرياضية وأيضاً مجالات التصميم الهندسي بمساعدة الحاسوب الحديث حين تم استخدامها في تصميم السيارات [22]، ولكن قبل ذلك بزمان طويل قدم عالم الرياضيات الروسي، سيرجي ناتانوفيتش برنشتاين، قاعدة كثيرات حدود برنشتاين كوسيلة لإعطاء أول إثبات استدلال لنظرية تقريب فايرشتراس [23].

يتم تعريف كثيرة حدود برنشتاين على المجال $[a, b]$ بالشكل التالي: [24]

$$P_{n,i}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n} ; 0 \leq i \leq n \quad (4)$$

حيث n هي درجة كثيرة الحدود، i تمثل دليل كثيرة الحدود و x متغير. باستخدام لغة البرمجة Mathematica يمكن أن نرى في الشكل (١) كثيرات حدود برنشتاين على المجال $[0,1]$ وذلك من أجل $n = 4$.



الشكل (١): رسم توضيحي لكثيرات حدود برنشتاين الخمس الأولى على المجال $[0, 1]$.

يتم تقريب التابع $f: [a, b] \rightarrow R$ بواسطة كثيرة حدود برنشتاين بالصيغة التالية: [25]

$$B_n(f(x)) = \sum_{i=0}^n c_i p_{n,i}(x) \quad (5)$$

حيث c_i عبارة عن ثوابت سيتم حسابها و $p_{n,i}(x)$ معرفة كما في العلاقة (4)، تم في [26] إثبات أنه من أجل أي تابع $f(x)$ قابل للاشتقاق على المجال $[a, b]$ تتقارب المتتالية $\{B_n(f); n = 1, 2, 3, \dots\}$ من التابع $f(x)$ ، حيث $B_n(f)$ معرفة كما في العلاقة (5)، وهذا يؤدي إلى وجود درجة n تحقق أنه من أجل أي تابع قابل للاشتقاق على المجال $[0, 1]$ ومن أجل أي مقدار صغير $\varepsilon > 0$ يكون:

$$\|B_n(f) - f\| < \varepsilon$$

6)

وقد تم في الفصل الأول من [27] إثبات أن هذه الدرجة n أكبر من المقدار $\frac{\|f\|}{\delta^2 \varepsilon}$ ، حيث أن δ هي مقدار صغير موجب و $\|\cdot\|$ هو النظم الإقليدي المعروف على الفضاء الخطي R .

تقنية الحل العددي لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني:

بتبديل الدالة المجهولة $f(x)$ في معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المعرفة في العلاقة (1) بتقريب برنشتاين الخاص بها $B_n(f)$ المعروف في العلاقة (5)، نجد أن:

$$\sum_{i=0}^n c_i p_{n,i}(x) = g(x) + \alpha \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i p_{n,i}(t) dt + \beta \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i p_{n,i}(t) dt, \quad (7)$$

بتبديل كثيرة حدود برنشتاين $p_{n,i}(x)$ كما تم تعريفها في العلاقة (4) نحصل على:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n c_i \frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ & - \alpha \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i \frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt \\ & - \beta \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i \frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt = g(x), \end{aligned} \quad (8)$$

الآن بإخراج المقدار $\sum_{i=0}^n c_i \frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n}$ كعامل مشترك، ينتج عن المعادلة (8) ما يلي:

$$\sum_{i=0}^n c_i \frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} \left[(x-a)^i (b-x)^{n-i} - \alpha \int_a^x k_1(x,t) (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt - \beta \int_a^b k_2(x,t) (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt \right] = g(x), \quad (9)$$

من أجل مقدار صغير جداً $\varepsilon > 0$ ، عند تبديل كل x في العلاقة (9) بـ x_j حيث:

$$x_j = \begin{cases} \frac{j}{n} + \varepsilon; & j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 - \varepsilon; & j = n. \end{cases} \quad (10)$$

من أجل $x_j; j = 0, 1, \dots, n$ يمكننا اختيار أي قيم أخرى ضمن المجال $[0, 1]$ باستثناء القيم المفردة للمعادلة التكاملية المراد حلها، ولكن تم صياغتها بهذا الشكل في العلاقة (١٠) وذلك لسهولة تعريفها تلقائياً في لغة البرمجة Mathematica.

بعد ذلك يتم الحصول على جملة خطية من المعادلات $AX = Y$ حيث Y مصفوفة الطرف الأيمن و A هي مصفوفة الأمثال التي تم حسابها لإيجاد مصفوفة المجاهيل X ، هذه الجملة الخطية مكونة من $n+1$ معادلة بالإضافة إلى $n+1$ مجهول، معرفة على النحو التالي:

$$A = \left[\frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} \left((x_j - a)^i (b - x_j)^{n-i} - \alpha \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt - \beta \int_a^b k_2(x_j, t) (t-a)^i (b-t)^{n-i} dt \right) \right], \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$X = [c_i]^T, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(12)

$$Y = [g(x_j)]^T, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

(13)

بحل جملة المعادلات يتم الحصول على قيم الثوابت المجهولة c_i من أجل $i = 0, 1, \dots, n$ ، حيث يتم حساب التكاملات في A عددياً.

بتعويض قيم c_i الناتجة عن حل جملة المعادلات (١١)-(١٣) في تقريب برنشتاين للدالة المجهولة المعروف في (5)، يتم استيفاء حل معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية (1) على شكل كثيرة حدود تقريبية.

تقنية الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني المعرفة في العلاقة (٢) وفق تقريب برنشتاين عددياً يتم اتباع ذات الخطوات السابقة مع فرض $\beta = 0$ ، وبذلك تصبح جملة المعادلات الخطية (١١)-(١٣) على النحو التالي:

$$A = \left[\frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} \left((x_j - a)^i (b - x_j)^{n-i} - \alpha \int_a^{x_j} k_1(x_j, t) (t - a)^i (b - t)^{n-i} dt \right) \right], \quad 14)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n,$$

$$X = [c_i]^T, i = 0, 1, \dots, n$$

15)

$$Y = [g(x_j)]^T, j = 0, 1, \dots, n.$$

16)

بحل جملة المعادلات (١٤)-(١٦) يتم الحصول على قيم الثوابت المجهولة c_i من أجل $i = 0, 1, \dots, n$ ، وبتعويضها في تقريب برنشتاين للدالة $f(x)$ يتم استيفاء حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني على شكل كثيرة حدود تقريبية.

تقنية الحل العددي لمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني:

لحل معادلة فريدهولم التكاملية المعرفة في العلاقة (٣) وفق تقريب برنشتاين عددياً يتم فرض $\alpha = 0$ لتصبح جملة المعادلات الخطية (١١)-(١٣) بالصيغة التالية:

$$A = \left[\frac{\binom{n}{i}}{(b-a)^n} \left((x_j - a)^i (b - x_j)^{n-i} - \beta \int_a^b k_2(x_j, t) (t - a)^i (b - t)^{n-i} dt \right) \right], \quad 17)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n,$$

$$X = [c_i]^T, i = 0, 1, \dots, n,$$

18)

$$Y = [g(x_j)]^T, j = 0, 1, \dots, n.$$

19)

أيضاً بحل جملة المعادلات (١٧)-(١٩) يتم الحصول على قيم الثوابت المجهولة c_i من أجل $i = 0, 1, \dots, n$ ، وبتعويضها في تقريب برنشتاين للدالة $f(x)$ يتم استيفاء حل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني على شكل كثيرة حدود تقريبية.

النتائج العددية:

سيتم اقتراح مجموعة من الأمثلة العددية لاختبار فعالية الطريقة المقترحة في حل المعادلات العددية، حيث تمتلك جميع المعادلات المقترحة حلولاً تحليلية وذلك لبيان الأخطاء المطلقة وبالتالي كفاءة الطريقة، تم إعداد البرامج وإنشاء جميع الرسوم البيانية ودراسة الخطأ وتنفيذ خوارزمية الطريقة باستخدام لغة البرمجة Mathematica.

المثال (١): لنفرض معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني التالية: [28]

$$f(x) = e^x + e^x(x-1) - xe - x^2(e^x - 1) + 1 + \int_0^x (x^2 - t)f(t) dt$$

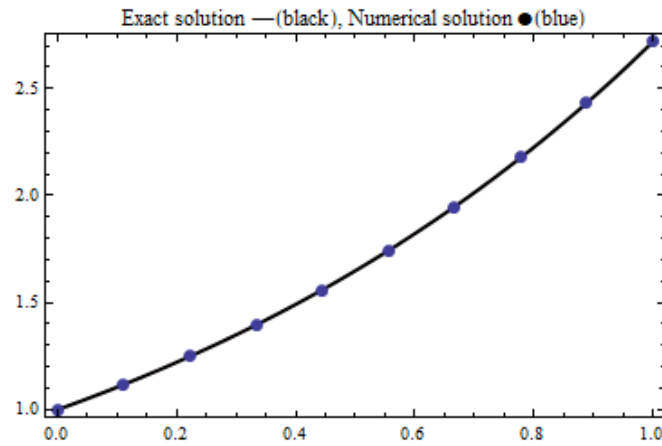
$$+ \int_0^1 (xt + x)f(t)dt; 0 \leq x \leq 1,$$

حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = e^x$.

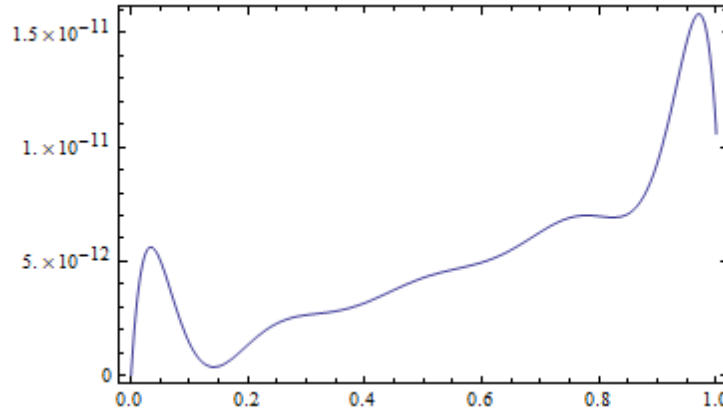
باتباع الطريقة المقترحة من أجل قيمة اختيارية لـ n ، سنأخذ هنا $n = 9$ ، يتم الحصول على الحل التقريبي للمعادلة (٢٠) على شكل كثرة حدود من الدرجة التاسعة بالصيغة التالية:

$$f(x) = 1. + x + 0.5 x^2 + 0.166667 x^3 + 0.0416661 x^4 + 0.00833527 x^5 + 0.00138486 x^6 + 0.000203708 x^7 + 0.0000205853 x^8 + 4.56391 * 10^{-6} x^9. \quad (21)$$

يشير الشكل (٢) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة، ويوضح الشكل (٣) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0,1]$. بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (١) الحل العددي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 9$ والطريقة التي تم استخدامها بناءً على كثيرات حدود لاغرانج لحل المعادلة (٢٠) في [28].



الشكل (٢): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (١) من أجل $n = 9$.



الشكل (٣): الخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (١) على المجال $[0,1]$.

جدول (١): الحل العددي والتقريبي للمثال (١) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n=9$ والطريقة [28] حيث $n = 5$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n = 9$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [28] و $n=5$
0	١	0.9999999999999954	$4.551914400963142 \times 10^{-12}$	0

٠.٤	١.٤٩١٨٢٤٦٩٧٦٤١٢٧.٣	1.4918246976444647	$3.1943336864515 \times 10^{-12}$	$2.554577710256 \times 10^{-6}$
٠.٦	١.٨٢٢١١٨٨٠.٣٩٠٥٠٨٩	1.8221188003954747	$4.9658055445434 \times 10^{-12}$	$3.878669883494 \times 10^{-6}$
1.	e	2.71828182846962	$1.057509635415954 \times 10^{-11}$	$7.751094385444 \times 10^{-6}$

المثال (٢): لدينا معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني التالية: [28]

$$f(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 + \int_0^x (x-t)f(t)dt \quad (22)$$

$$+ \int_0^2 xt f(t)dt; 0 \leq x \leq 2,$$

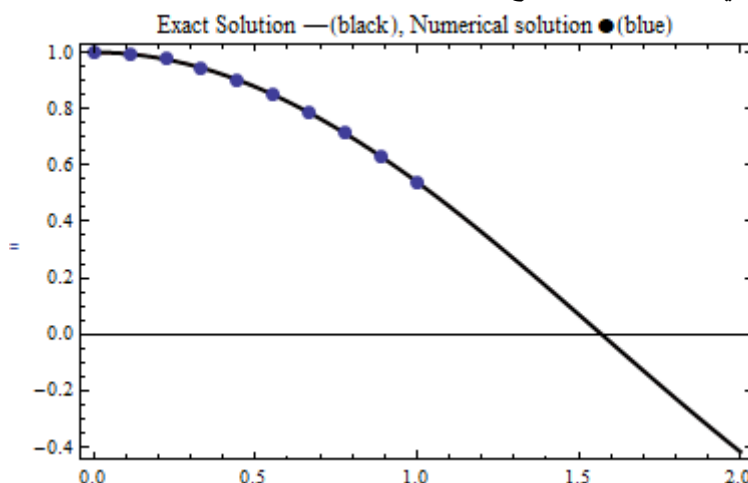
حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = \cos(x)$. باتباع الطريقة المقترحة من أجل $n = 9$ يتم الحصول على الحل التقريبي للمعادلة (٢٢) على شكل كثيرة حدود من الدرجة التاسعة بالصيغة التالية:

$$f(x) = 1. - 8.44643 * 10^{-7} x - 0.5 x^2 - 2.01437 * 10^{-7} x^3 + ٠.٠٤١٦٦٧ x^4 \quad (23)$$

$$- 1.14487 * 10^{-6} x^5 - 0.00138647 x^6 - ٣.٢٨٤٠٥ * ١٠^{-٦} x^7$$

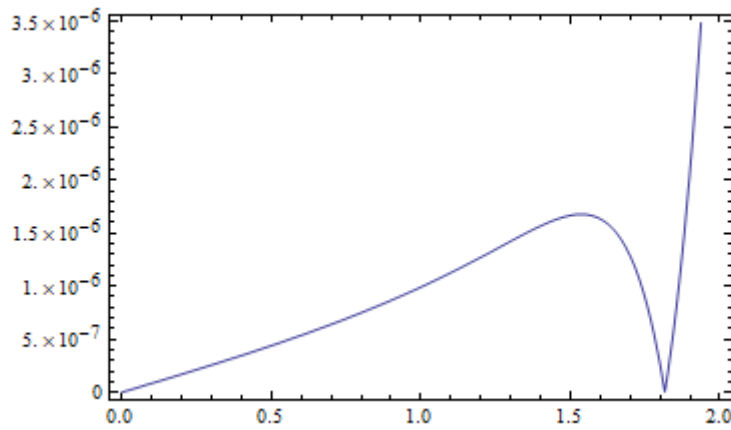
$$+ 0.0000275609 x^8 - 1.31519 * 10^{-6} x^9.$$

يشير الشكل (٤) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة، ويوضح الشكل (٥) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0,2]$.



الشكل (٤): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٢) من أجل $n = 9$

بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (٢) الحل العددي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 9$ والطريقة التي تم استخدامها بناءً على كثيرات حدود لاغرانج لحل المعادلة (٢٢) في [28] وذلك من أجل قيم مختلفة لـ x .

الشكل (٥): الخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (٢) على المجال $[0, 2]$.

جدول (٢): الحل العددي الدقيق والتقريبي للمثال (٢) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة حيث $n=9$ والطريقة [28] من أجل

$n = 9$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n = 9$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [28] و $n=9$
0.2222	٠.٩٧٥٤١٤٩٨٢٨٧٦٢٣٧٥	0.9754147937000895	1.89176×10^{-7}	$5.694289484381e-11$
٠.٤٤٤٤	٠.٩٠٢٨٦٨٧٧٧٦٣٨٩٠١٣	0.9028683899079437	3.87730×10^{-7}	$9.869005612728e-11$
١.١١١١	٠.٤٤٣٦٧٥٩٧٩٣٦٥٩٦٤١٥	0.4436748360623017	1.1433×10^{-6}	$2.697743139989e-10$
2	-٠.٤١٦١٤٦٨٣٦٥٤٧١٤٢٤	-0.4161399229870788	6.91356×10^{-6}	$7.011126679223e-10$

المثال (٣): نفرض لدينا معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني بالصيغة التالية: [29]

$$f(x) - \int_0^1 2e^x e^t f(t) dt = e^x, \quad (٢٤)$$

حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = \frac{e^x}{2-e^2}$. باتباع الطريقة المقترحة من أجل $n = 13$ يتم الحصول

على الحل التقريبي للمعادلة (٢٤) على شكل كثيرة حدود من الدرجة ١٣ بالصيغة التالية:

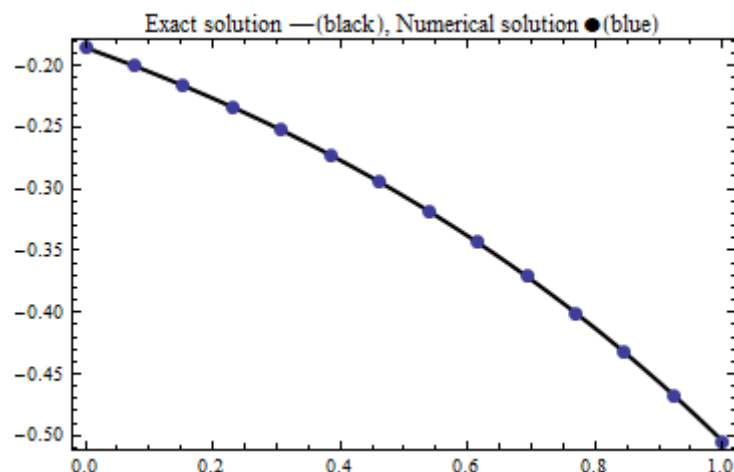
$$f(x) = -0.185561 - 0.185561x - 0.0927806x^2 - 0.0309269x^3 - \dots - 0.0000366042x^7 \quad (٢٥)$$

$$- ٥.٠٢٣٦٨ * ١٠^{-٦} x^8 + 6.93399 * 10^{-8} x^9 - 5.97815 * 10^{-7} x^{10}$$

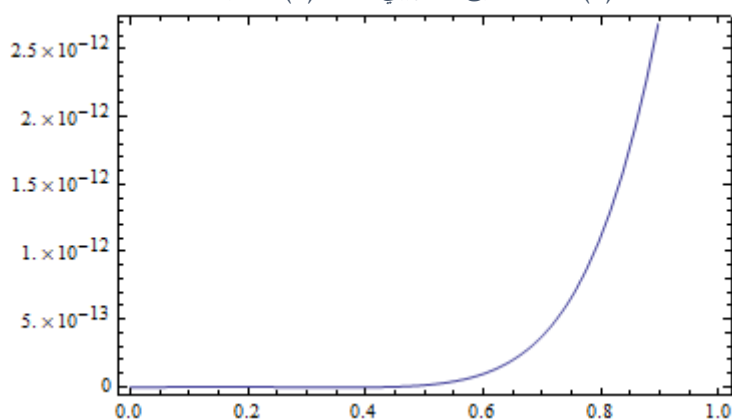
$$+ ٣.٣٠٢٥٩ * ١٠^{-٧} x^{11} - 1.20615 * 10^{-7} x^{12} + 1.9144 * 10^{-8} x^{13}.$$

يشير الشكل (٦) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة،

ويمثل الشكل (٧) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0, 1]$.



الشكل (٦): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٣) من أجل $n = 13$



الشكل (٧): الخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (٣) على المجال $[0, 1]$.

بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (٣) الحل العددي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 13$ والطريقة التي تم استخدامها بناءً على قاعدة سيمبسون لحل المعادلة (٢٢) في [29] وذلك من أجل قيم مختلفة لـ x .

جدول (٣): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٣) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة حيث $n=13$ والطريقة [29] حيث $n = 10$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي بالطريقة المقترحة	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n = 13$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [29] $n=10$
0.00	-٠.١٨٥٥٦١٢٥٢٥٩٠٨٦٢٧٩	-0.18556125259086217	6.10623×10^{-16}	1.830029e-04
٠.٣	-٠.٢٥٠٤٨١٤٩١١٥٤٦١١٥٥	-0.250481491154609	2.553512×10^{-15}	2.470281e-04
0.7	-٠.٣٧٣٦٧٤٤٧٤٨٠٦٤٦٢٩٣	-0.37367447480684124	$3.7830849 \times 10^{-13}$	3.685226e-04

1.	-٠.٥٠٤٤٠٧٧٨٠٩٨٣٨٤١٢	-0.5044077809897319	5.8907323 $\times 10^{-12}$	4.974534e-04
----	---------------------	---------------------	--------------------------------	--------------

المثال (٤): لنأخذ معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني بالصيغة التالية: [29]

$$f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi} \cos(x-t) f(t) dt = -\frac{2}{\pi} \cos(x); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = \sin x$

باتباع الطريقة المقترحة من أجل $n = 10$ يتم استيفاء الحل للمعادلة (٢٦) على شكل كثيرة حدود من الدرجة العاشرة بالصيغة التالية:

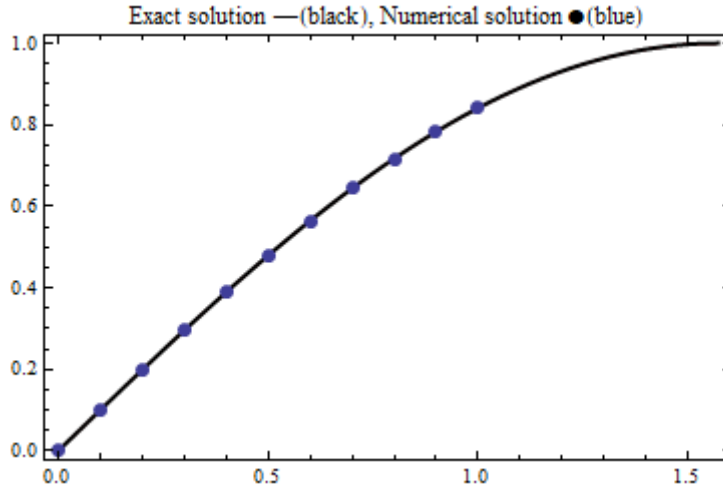
(٢٧)

$$f(x) = -4.25927 * 10^{-9} + 1.x + 1.89687 * 10^{-9} x^2 - 0.166667 x^3 - ١.٨٦٨٠٤$$

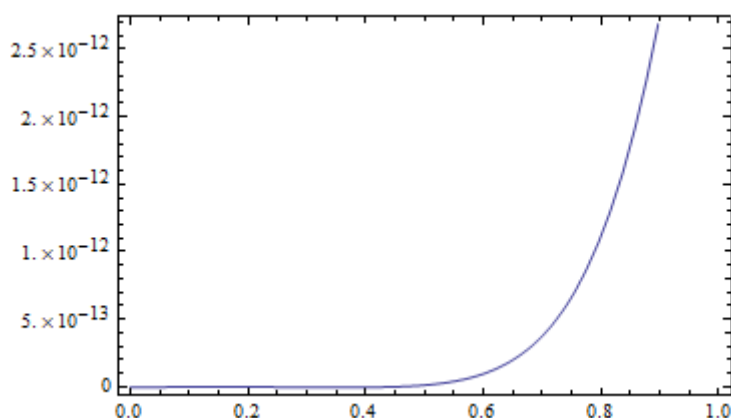
$$* ١٠^{-٨} x^4 + 0.00833341 x^5 - 2.01003 * 10^{-7} x^6 - ٠.٠٠٠١٩٨٠٥٨ x^7$$

$$- 4.13701 * 10^{-7} x^8 + 3.06201 * 10^{-6} x^9 - ١.٣١١٢٧ * ١٠^{-٧} x^{10}.$$

يشير الشكل (٨) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة، ويبين الشكل (٩) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$. بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (٤) الحل التقريبي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 10$ والطريقة التي تم استخدامها بناءً على قاعدة سيمبسون لحل المعادلة (٢٢) في [29] وذلك من أجل قيم مختلفة لـ x .



الشكل (٨): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٤) من أجل $n = 10$



الشكل (٩): الخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (٤) على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$.

جدول (٤): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٤) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n=10$ والطريقة [29] من أجل $n=10$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي بالطريقة المقترحة	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n=10$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [29] $n=10$
0.00	٠.	-4.2592×10^{-9}	4.2592×10^{-9}	$3.241537e-03$
٠.٤٧١	٠.٤٥٣٧٧٧٦٢٧٠٧٥٥٤٥١	0.45377762313823666	3.93730×10^{-9}	$3.830231e-03$
0.942	٠.٨٠٨٧٣٦٠٦٠٥٥٣١٣٠٢	0.8087360577951463	2.757983×10^{-9}	$3.583984e-03$
1.571	٠.٩٩٩٩٩٩٩٧٩٢٥٨٦١٢٨	1.000000005618781	2.636016×10^{-8}	$2.074933e-03$

مثال (٥): لنأخذ معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ذات الصيغة التالية: [30]

$$f(x) = x + \int_0^x (t-x) f(t) dt, x \in [0,1] \quad (28)$$

حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = \sin x$. باتباع الطريقة المقترحة من أجل $n=3$ يتم استيفاء الحل للمعادلة (٢٨) على شكل كثيرة حدود من الدرجة الثالثة بالصيغة التالية:

$$f(x) = -3.53612 * 10^{-8} + 1.00354 x - 0.0178457 x^2 - 0.144247 x^3. \quad (29)$$

في هذا المثال سوف نوضح بالتفصيل كيف تم تطبيق الطريقة المقترحة وكيف تم تطبيق العلاقات من (٤) ولغاية (١٩) للحصول على الصيغة النهائية للدالة $f(x)$ التي تمثل الحل التقريبي بصيغة كثيرة حدود للمعادلة التكاملية (٢٨).

في البداية من أجل $n=3$ و $\epsilon = 0.00001$ يتم الحصول على النقاط x_j المعرفة في العلاقة (١٠) على النحو التالي: $x_0 = 0.00001$, $x_1 = 0.333343$, $x_2 = 0.666677$ و $x_3 = 0.99999$ ثم بالاستفادة من العلاقات (١٤)-(١٦) يتم حساب المصفوفات A و Y لتشكيل جملة المعادلات الخطية $AX = Y$ على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 0.99997 & 0.336203 & 0.153909 & 0.199998 \\ 0.0000299994 & 0.457408 & 0.29135 & 0.149998 \\ 2.99997 \times 10^{-10} & 0.224702 & 0.474076 & 0.100027 \\ 1. \times 10^{-15} & 0.0372462 & 0.302894 & 1.04997 \end{pmatrix}$$

و

$$Y = \begin{pmatrix} 0.00001 \\ 0.333343 \\ 0.666677 \\ 0.99999 \end{pmatrix}$$

بحل جملة المعادلات الخطية $AX = Y$ المكونة من ٤ معادلات و ٤ مجاهيل يتم حساب مصفوفة

المجاهيل

$$X = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.53612 \times 10^{-8} \\ 0.334512 \\ 0.663076 \\ 0.841443 \end{pmatrix}$$

ثم بالاستفادة من العلاقة (٤) يتم حساب كثيرات حدود برنشتاين $p_{n,i}(x)$ من أجل $n = 3$ و $i = 0, 1, \dots, n$ على النحو التالي:

$$p_{n,2}(x) = 3x^2 - , p_{n,1}(x) = 3x - 6x^2 + 3x^3 , p_{n,0}(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ p_{n,3}(x) = x^3 \text{ و } 3x^3$$

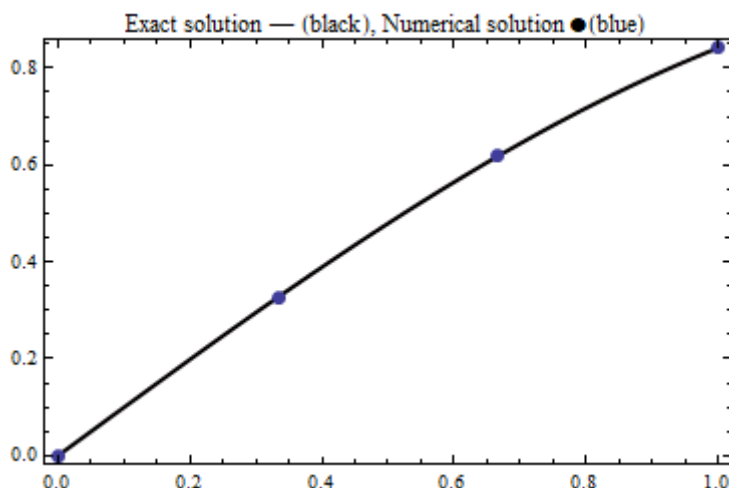
الآن بتعويض قيم c_i و $p_{n,i}$ من أجل $i = 1, \dots, n$ في العلاقة (٥)، نحصل على كثرة الحدود $f(x)$ التي تمثل الحل التقريبي للمعادلة التكاملية (٢٨) بالشكل التالي:

$$f(x) = c_0 \cdot p_{n,0}(x) + c_1 \cdot p_{n,1}(x) + c_2 \cdot p_{n,2}(x) + c_3 \cdot p_{n,3}(x)$$

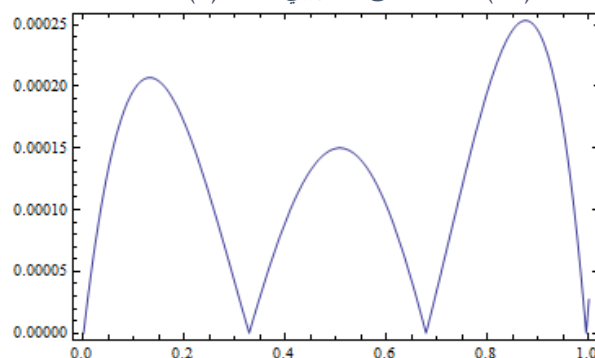
بالتعويض نحصل على الحل التقريبي $f(x)$ كما في العلاقة (٢٩) بالصيغة التالية:

$$f(x) = -3.53612 \times 10^{-8} + 1.00354 x - 0.0178457 x^2 - 0.144247 x^3.$$

يشير الشكل (١٠) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة، ويمثل الشكل (١١) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0,1]$. بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (٥) الحل التقريبي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 3$ والطريقة التي تم استخدامها لحل المعادلة (٢٨) في [30] وذلك من أجل قيم مختلفة لـ x .



الشكل (١٠): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٥) من أجل $n = 3$



الشكل (١١): الرسم البياني للخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (٥) على المجال $[0, 1]$ من أجل $n = 3$

جدول (٥): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٥) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 3$ والطريقة [30] من أجل $n = 3$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي بالطريقة المقترحة من أجل $n = 3$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n = 3$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [30] $n=3$
0.00	٠.	-3.536123×10^{-8}	3.536123×10^{-8}	0.00E+00
٠.٣٣٣	٠.٣٢٦٨٧٩٦٩٢٩٧٥٧٣٠٨	0.32687218368364096	7.50929×10^{-6}	6.14E-03
0.666	٠.٦١٧٨٤٥٧٤٠٨٥٢٥٢١٦	0.6178277652863591	0.0000179756	1.13E-02
1.	٠.٨٤١٤٧٠٩٨٤٨٠٧٨٩٦٥	0.8414434160974062	0.0000275687	1.45E-02

مثال (٦): لنأخذ معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ذات الصيغة التالية: [31]

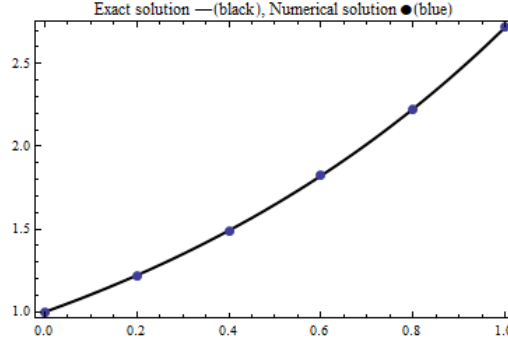
$$f(x) = x + 1 + \int_0^x (x-t) f(t) dt, \quad (30)$$

حيث أن الحل الدقيق هو $f(x) = e^x$. باتباع الطريقة المقترحة من أجل $n = 5$ يتم استيفاء الحل للمعادلة

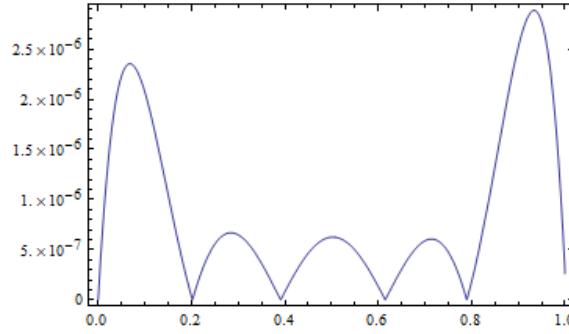
(٣٠) على شكل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة بالصيغة التالية:

$$f(x) = 1.1.00008x + 0.499069x^2 + 0.170409x^3 + 0.0348664x^4 + 0.0138545x^5. \quad (31)$$

يشير الشكل (١٢) إلى الرسم البياني للحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن استخدام الطريقة المقترحة، ويوضح الشكل (١٣) الرسم التوضيحي للخطأ المطلق الناتج عن هذه الطريقة على المجال $[0,1]$. بالإضافة إلى ذلك، يبين الجدول (٦) الحل التقريبي ومقدار الخطأ ومقارنة بين الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 5$ والطريقة التي تم استخدامها لحل المعادلة (٣٠) في [31] وذلك من أجل قيم مختلفة لـ x .



الشكل (١٢): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٦) من أجل $n = 5$.



الشكل (١٣): الرسم البياني للخطأ المطلق الناتج عن حل المثال (٦) على المجال $[0,1]$ من أجل $n = 5$.

جدول (٦): الحل الدقيق والتقريبي للمثال (٦) ومقدار الخطأ المطلق للطريقة المقترحة من أجل $n = 5$ والطريقة [31] من أجل $n = 5$.

x	الحل الدقيق	الحل التقريبي بالطريقة المقترحة من أجل $n = 5$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة المقترحة $n = 5$	مقدار الخطأ المطلق بالطريقة [31] $n=5$
0.2	١.٢٢١٤٠٢٧٥٨١٦٠١٦٩٩	1.2214027913981653	3.3238×10^{-8}	9.14935032181319e-08
0.4	١.٤٩١٨٢٤٦٩٧٦٤١٢٧٠٣	1.491824779529862	8.18886×10^{-8}	6.03097460372126e-06
0.6	١.٨٢٢١١٨٨٠٠٣٩٠٥٠٨٩	1.8221189326798193	1.32289×10^{-7}	7.08003905089960e-05

0.8	٢.٢٢٥٥٤٠٩٢٨٤٩٢٤٦٨	2.2255411136251477	1.85133×10^{-7}	4.10261825801062 e-04
1.	٢.٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩٠٤٥	2.718282090122967	2.61664×10^{-7}	1.61516179237875 e-03

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث تطوير تقنية عددية تستخدم كثيرات حدود برنشتاين وتقريب برنشتاين، تم تطبيقها لحل مسائل متنوعة من المعادلات التكاملية من نوع فولتيرا وفريدهولم وأيضاً معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المجرأة من النوع الثاني، تمتاز الطريقة المقترحة بالفعالية والدقة وسرعة الأداء عند تطبيقها على الحاسوب، حيث أشارت النتائج العددية متضمنة الأمثلة والرسوم البيانية والجداول ومقارنة الأخطاء المطلقة فعالية وكفاءة الطريقة المقترحة في حل الأنواع الثلاث من المعادلات التكاملية معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية المجرأة من النوع الثاني بالإضافة إلى معادلتى فولتيرا وفريدهولم التكامليتين من النوع الثاني بمقدار خطأ صغير، حيث أثبتت النتائج العددية دقة الطريقة وأفضليتها على العديد من الطرائق الأخرى في الوصول للحل التقريبي للمعادلة التكاملية واستيفاءه على شكل كثيرة حدود بالإضافة إلى السرعة الكبيرة في الأداء بما يخص التطبيق الحاسوبي، نوصي بتطبيق التقنية المقترحة وتطوير تقنيات مشابهة لحل أنواع أخرى من المعادلات المعقدة والتي لها أهمية كبيرة في المجالات العلمية.

المراجع:

- [1] A. J. Jerri, *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley & Sons, 1999.
- [2] R. M. Ganji, H. Jafari, and S. Nemati, "A new approach for solving integro-differential equations of variable order," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 379, p. 112946, 2020.
- [3] M. Tabata, N. Eshima, Y. Sakai, and I. Takagi, "An extension of Krugman's core-periphery model to the case of a continuous domain: Existence and uniqueness of solutions of a system of nonlinear integral equations in spatial economics," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 14, no. 6, pp. 2116–2132, 2013.
- [4] E. G. Ladopoulos, "Non-linear multidimensional singular integral equations in two-dimensional fluid mechanics," *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 35, no. 4, pp. 701–708, 2000.
- [5] M. A. Bartoshevich, "A heat-conduction problem," *J. Eng. Phys.*, vol. 28, no. 2, pp. 240–244, 1975.
- [6] H. J. Ding, H. M. Wang, and W. Q. Chen, "Analytical solution for the electroelastic dynamics of a nonhomogeneous spherically isotropic piezoelectric hollow sphere," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 73, no. 1, pp. 49–62, 2003.
- [7] E. S. Shoukralla, N. Saber, and A. Y. Sayed, "Computational method for solving weakly singular Fredholm integral equations of the second kind using an advanced barycentric Lagrange interpolation formula," *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.*, vol. 8, pp. 1–22, 2021.
- [8] M. A. Abdou, "On a symptotic methods for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind in contact problems," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 154, no. 2,

pp. 431–446, 2003.

- [9] M. A. Abdou and F. A. Salama, “Volterra–Fredholm integral equation of the first kind and spectral relationships,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 153, no. 1, pp. 141–153, 2004.
- [10] C. Constanda, “Integral equations of the first kind in plane elasticity,” *Q. Appl. Math.*, vol. 53, no. 4, pp. 783–793, 1995.
- [11] K. Maleknejad and N. Aghazadeh, “Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 161, no. 3, pp. 915–922, 2005.
- [12] E. Babolian and A. Davari, “Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 165, no. 1, pp. 223–227, 2005.
- [13] E. Yusufoglu and B. Erbas, “Numerical expansion methods for solving Fredholm-Volterra type linear integral equations by interpolation and quadrature rules,” *Kybernetes*, vol. 37, no. 6, pp. 768–785, 2008.
- [14] Z. Avazzadeh, M. Heydari, and G. B. Loghmani, “Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem,” *Appl. Math. Model.*, vol. 35, no. 5, pp. 2374–2383, 2011.
- [15] J. Reinkenhorf, “Differentiation and integration using Bernstein’s polynomials,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 11, no. 10, pp. 1627–1630, 1977.
- [16] E. Kreyszig, “Bernstein polynomials and numerical integration,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 14, no. 2, pp. 292–295, 1979.
- [17] M. Ramadan and M. Ali, “Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations using hybrid orthonormal bernstein and block-pulse functions,” *Asian Res. J. Math.*, vol. 4, no. 4, pp. 1–14, 2017.
- [18] B. Yilmaz and Y. Cetin, “Numerical solutions of the Fredholm integral equations of the second type,” *New Trends Math. Sci.*, vol. 5, no. 3, pp. 284–292, 2017.
- [19] J. Biazar and H. Ebrahimi, “Orthonormal Bernstein polynomials for Volterra integral equations of the second kind,” *Int. J. Appl. Math. Res.*, vol. 9, no. 1, pp. 9–20, 2019.
- [20] W. Abdul-Majid, “Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications,” *Heidelb. Dordr.*, 2011.
- [21] M. K. Shahooth, “Numerical solution for mixed Volterra-Fredholm integral equations of the second kind by using Bernstein polynomials method,” *Math. Theory Model.*, vol. 5, no. 10, pp. 154–162, 2015.
- [22] C. R. Lawson, “Bernstein polynomials and their applications,” 2012.
- [23] S. Bernstein, “Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités,” *Сообщения Харьковского математического общества*, vol. 13, no. 1, pp. 1–2, 1912.
- [24] Y. Bertot, F. Guilhot, and A. Mahboubi, “A formal study of Bernstein coefficients and polynomials,” *Math. Struct. Comput. Sci.*, vol. 21, no. 4, pp. 731–761, 2011.
- [25] M. Basit and F. Khan, “An effective approach to solving the system of Fredholm integral equations based on Bernstein polynomial on any finite interval,” *Alexandria Eng. J.*, vol. 61, no. 4, pp. 2611–2623, 2022.
- [26] M. J. D. Powell, *Approximation theory and methods*. Cambridge university press, 1981.

- [27] T. J. Rivlin, *An introduction to the approximation of functions*. Courier Corporation, 1981.
- [28] M. M. Mustafa and I. N. Ghanim, “Numerical solution of linear Volterra-Fredholm integral equations using Lagrange polynomials,” *Math. Theory Model.*, vol. 4, no. 5, pp. 137–146, 2014.
- [29] N. Djaidja and A. Khirani, “Approximate Solution of Linear Fredholm Integral Equation of the Second Kind Using Modified Simpson’s Rule,” *Math. Model. Eng. Probl.*, vol. 11, no. 3, 2024.
- [30] J. A. Zarnan, “Numerical solution of Volterra integral equations of Second Kind,” *Int. J. Comput. Sci. Mob. Comput*, vol. 5, no. 7, pp. 509–517, 2016.
- [31] E. S. Shoukralla and B. M. Ahmed, “Numerical solutions of Volterra integral equations of the second kind using Lagrange interpolation via the vandermonde matrix,” in *Journal of Physics: conference series*, IOP Publishing, 2020, p. 12003.