مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1) 2025

# التطبيقات المفتوحة (المغلقة) من النمط $N$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا

أ.د.عدنان ظريف *

د.براءة عفيصة **

تيماء محمد جمول ***

(تاريخ الإيداع ١٦/١٠/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ١٤/١/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

قُمنا في هذا البحث بتعريف نمط جديد من التطبيقات المفتوحة (المغلقة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا وهو التطبيق $N-$مفتوح ( $N-$مغلق) ثم درسنا بعض خواص هذه التطبيقات والعلاقة التي تربط بينها وبين تطبيقات معرفة سابقاً.

كما توصلنا إلى إيجاد شرط لازم وكافي كي يكون التطبيق $f$ هو $N-$ مفتوح ( $N-$ مغلق) في الفضاء ثنائي التبولوجيا.

**الكلمات المفتاحية:** الفضاء ثنائي التبولوجيا، المجموعة $N-$ مفتوحة، المجموعة $N-$ مغلقة، لصاقة مجموعة من النمط $N$،داخلية مجموعة من النمط $N$،التطبيق $N-$ مفتوح، التطبيق $N-$ مغلق.

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني:
Dr.AdnanZarif@tishreen.edu.sy.

** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني:.baraaafisa@tishreen.edu.sy

*** طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني:

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (١) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (1) 2025

# $N-$open($N-$closed) functions in bitopological spaces

**Dr. Adnan Zarif***
**Dr. Baraa Afisa****
**Taima Mohammd Jmoul *****

**(Received 16/10/2024.Accepted 14/1/2025)**

**□ABSTRACT □**

In this research, we defined a new type of open function, which are $N-$open ($N-$closed ) functions, then we studied some of the properties of these functions and the relationship with previously defind functions.

We also found a necessary and sufficient condition for the function $f$ to be $N-$open($N-$closed ) in bitopological space.

**Keywords**: Bitopological space, $N-$open set, $N-$closed set, $N-$closure set, $N-$ interior set, $N-$open function, $N-$closed function.

* Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail:Dr.AdnanZarif@tishreen.edu.sy.

**Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: baraaafisa@tishreen.edu.sy.

***Postgraduate Student, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

E-mail: Taima.jmoul @tishreen.edu.sy.

## المقدمة (Introduction):

تعد المجموعات المفتوحة والمغلقة اللبنة الرئيسية في بناء التبولوجيا والفضاء التبولوجي انطلاقاً من ذلك قام الباحثون باستنباط أنواع مختلفة من المجموعات المفتوحة (المغلقة) من الأنماط $h,\beta,\alpha$ وغيرها .....

واستخدم بعضهم هذه المجموعات في تعريف التطبيقات المستمرة (المفتوحة –المغلقة) المناسبة لكل نمط على حدى ويتضح ذلك جلياً في الأعمال [1,2,5,6].

توسع الباحثون ومددوا مفهوم الفضاء التبولوجي إلى الفضاء ثنائي التبولوجيا على يد العالم كيلي في العام

1963 العمل[9]،ثم توالت الدراسات لبنية الفضاءات ثنائية التبولوجيا ومن ضمنها دراسة التطبيقات المستمرة حيث تم تعريفها على يد الباحث A.Tallafha عام 1999 في العمل[3].وفي العام 2009 درس كل من A.Kilicman , Z.Salleh أهم خواص التطبيق المستمر كما أنه تم تعريف التطبيق

( $p-$مفتوح ، $p-$مغلق) ضمن العمل[11].ما زالت الدراسات التي تخص الاستمرار (المفتوح– المغلق) في الفضاء ثنائي التبولوجيا مستمرة إلى يومنا هذا ويتضح ذلك في الأعمال[4,7,10,14].

في العام2010 في العمل[٨] قام كل منA.I.Nasir , N.A.Jabbar بوضع تعريف المجموعات المفتوحة من النمط $N$في الفضاء ثنائي التبولوجيا ثم وضعا تعريف التطبيق $N-$مستمر واستخدماه في دراسة موضوع التراص.

وفي العام 2019 في العمل [13] قام الباحث الحميدو بدراسة خصائصها الأساسية وقدم نوعاً جديداً من المجموعات المفتوحة فيه، أما في العام 2023 العمل[١٢] درست عفيصة أهم خواص التطبيق

$N-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا وقدمت تعريف التطبيق $N-$ هوميومورفيزم.

وفي بحثنا هذا قمنا بتعريف كل من التطبيق $N-$ مفتوح والتطبيق $N-$ مغلق ودراسة أهم خواص هذين التطبيقين في الفضاء ثنائي التبولوجيا والعلاقة بينهما وبين كل من التطبيقات $p-$مفتوح و $N-$ هوميومورفيزم.

## أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم إضافة جديدة في مجال التطبيقات المفتوحة (المغلقة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا وذلك بالاعتماد على المجموعات المفتوحة (المغلقة) من النمط $N$،ويهدف هذا البحث إلى دراسة أهم خواص التطبيق المفتوح (المغلق) من النمط $N$وإيجاد العلاقة بينها وبين تطبيقات مفتوحة (مغلقة) معرفة سابقاً.

## طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث على بعض المفاهيم الأساسية في التبولوجيا العامة و يركز بشكل خاص على ما يتعلق بالتطبيقات المفتوحة (المغلقة).

**بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث:**

| |
|---|
| $N-$ مفتوحة(مجموعة مفتوحة من النمط $N$في الفضاء ثنائي التبولوجيا). |
| $N-$مغلقة (مجموعة مغلقة من النمط $N$في الفضاء ثنائي التبولوجيا). |

$N-$مستمر (التطبيق المستمر من النمط $N$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا).
$p-$هوميومورفيزم (التطبيق الهوميومورفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا).
$N-cl(A)$ لصاقة المجموعة $A$ من النمط $N$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا.
$N-\text{int}(A)$ داخلية المجموعة $A$ من النمط $N$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا.
$\sigma_1$ أسرة المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي $(Y,\sigma_1)$.
$\sigma_2$ أسرة المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي $(Y,\sigma_2)$.
$J_1$ أسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي $(Y,\sigma_1)$.
$J_2$ أسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي $(Y,\sigma_2)$.
$\tau_1$ أسرة المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau_1)$.
$\tau_2$ أسرة المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau_2)$.
$F_1$ أسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau_1)$.
$F_2$ أسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau_2)$.

## تعاريف أساسية:

**تعريف1:[9]**

لتكن $X\neq\Phi$ مجموعة ما، ولتكن كل من $\tau_1,\tau_2$ تبولوجيا على $X$ عندئذ تسمى الثلاثية $(X,\tau_1,\tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا إذا كان كل من $(X,\tau_1)$ و $(X,\tau_2)$ هو فضاء تبولوجي.

**تعريف٢:[١٤]**

ليكن $(X,\tau_1,\tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذ تدعى المجموعة الجزئية $A$ من $X$ مجموعة مفتوحة في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ إذا كان $A\in\tau_1\cup\tau_2$.

وعندئذ تدعى $A^c$ متممة المجموعة $A$ هي مجموعة مغلقة في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$.

**تعريف٣:[٨]**

بفرض $A$ مجموعة جزئية من الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X,\tau_1,\tau_2)$ عندئذ:

$A$ هي مجموعة $N-$مفتوحة في $(X,\tau_1,\tau_2)$ إذا وفقط إذا كانت $A$ مفتوحة في الفضاء $(X,\tau_1\vee\tau_2)$ حيث:{ $\tau_1\vee\tau_2$ : is the supremum topology on $X$ contains $\tau_1,\tau_2$ }.

إن متممة المجموعة $N-$مفتوحة في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ هي $N-$مغلقة فيه.

يرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النمط $N$ بالرمز $N-O(X)$.

يرمز لأسرة المجموعات المغلقة من النمط $N$ بالرمز $N-C(X)$.

**تعريف٤:[3]**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً من الفضاء ثنائي التبولوجيا $(X,\tau_1,\tau_2)$ إلى الفضاء ثنائي التبولوجيا $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ عندئذ:

١- يقال عن $f$ إنه $p-$ مستمر إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2$ من أجل كل $u\in\sigma_1\cup\sigma_2$.

2- يقال عن $f$ إنه $p$ – هوميورفيزم إذا وفقط إذا كان $f$ تقابل و $p$ – مستمر على $X$ وكان $f^{-1}$ هو

$p$ –مستمر على $Y$ ،حيث $f^{-1}:(Y,\sigma_1,\sigma_2)\to(X,\tau_1,\tau_2)$ .

في المرجع [11] تم وضع التعريف $p$ –مستمر تحت مسمّى $p_2$ –مستمر وكذلك تم وضع تعريف $p$ – هوميورفيزم تحت مسمى $p_2$ – هوميومورفيزم.

**تعريف٥ :[8]**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً عندئذ يقال أنه $N$–مستمر إذا فقط إذا كان $f^{-1}(u)\in\tau_1\vee\tau_2$ من أجل كل $u\in\sigma_1\vee\sigma_2$ .

**تعريف٦ :[8]**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً عندئذ:

يقال أنه $N$–مستمر على $X$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل مجموعة مغلقة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ مثل $v$ فإن $f^{-1}(v)$ هي

$N$ – مغلقة في $(X,\tau_1\vee\tau_2)$.

**تعريف٧ :[12]**

إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً عندئذ:

$f$ هو $N$–هوميورفيزم إذا وفقط إذا كان $f$ تقابل (غامر ومتباين) و $f$ هو $N$–مستمر على $X$

و $f^{-1}$ هو $N$–مستمر على $Y$ .

**تعريف٨ :[13]**

ليكن $(X,\tau_1,\tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تقاطع المجموعات $N$–مغلقة التي تحوي المجموعة $A$ تسمى لصاقة $A$ من النمط $N$ ويرمز لها بالرمز $N-cl(A)$ .

**تعريف٩ :[13]**

ليكن $(X,\tau_1,\tau_2)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا عندئذ اجتماع المجموعات $N$–مفتوحة المحتواة في $A$ تسمى داخلية $A$ من النمط $N$ ونرمز لها ب $N-\mathrm{int}(A)$ .

**تعريف١٠ :[3]**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً عندئذ:

$f$ هو ( $p$–مفتوح ) إذا وفقط إذا كان $f(u)\in\sigma_1\cup\sigma_2$ من أجل كل $u\in\tau_1\cup\tau_2$ .

و $f$ هو ( $p$–مغلق ) إذا وفقط إذا كانت المجموعة $f(v)$ مغلقة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ من أجل كل مجموعة

$v$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ .

**مبرهنة١ : [12]**

إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ:

$f$ هو $N-$هوميومورفيزم $\Leftrightarrow f(N-cl(A))=N-cl(f(A));\forall A\subseteq X$ .

**مبرهنة۲:[12]**

إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ الشروط الأتية متكافئة:

1- من اجل كل مجموعة $N-$مغلقة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ مثل $v$ فإن $f^{-1}(v)$ هي $N-$مغلقة $(X,\tau_1,\tau_2)$.

۲- $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A));\forall A\subseteq X$ .

۳- $N-cl(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(N-cl(B));\forall B\subseteq Y$ .

## النتائج والمناقشة:

**تعريف۱۱:**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ:

$f$ هو $N-$مفتوح إذا وفقط إذا كان $f(u)\in\sigma_1\vee\sigma_2$ من أجل كل $u\in\tau_1\vee\tau_2$ .

**تعريف 12:**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ:

$f$ هو $N-$مغلق إذا وفقط إذا كانت $f(v)$ مجموعة $N-$مغلقة في الفضاء $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ من أجل كل مجموعة $v$ هي $N-$مغلقة في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ .

**ملاحظة۱:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $p-$ مفتوح تطبيقاً $N-$ مفتوح في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال۱:**

ليكن $X=\{a,b,c\}$ ، $Y=\{1,2\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(b)=1, f(a)=f(c)=2$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{b,c\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{a,b\}\}\ ,\sigma_1=\{Y,\phi\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\}\}.$$

$$\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{b,c\},\{a,b\}\},\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{b,c\},\{a,b\},\{b\}\}$$

$$\sigma_1\cup\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\}\}.$$

نلاحظ أن $f$ هو تطبيق $p-$مفتوح لأن:

$$X\in\tau_1\cup\tau_2\Rightarrow f(X)=Y\in\sigma_1\cup\sigma_2$$

$$\phi\in\tau_1\cup\tau_2\Rightarrow f(\phi)=\phi\in\sigma_1\cup\sigma_2$$

$$\{a,b\}=\tau_1\cup\tau_2\Rightarrow f(\{a,b\})=\{1,2\}=Y\in\sigma_1\cup\sigma_2$$

$$\{b,c\}=\tau_1\cup\tau_2\Rightarrow f(\{b,c\})=\{1,2\}=Y\in\sigma_1\cup\sigma_2$$

ولكن $f$ ليس تطبيق $N-$مفتوح لأنه:

$$\exists\{b\}\in\tau_1\vee\tau_2;\ f(\{b\})=\{1\}\notin\sigma_1\vee\sigma_2.$$

**ملاحظة2 :**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مفتوح تطبيقاً $p-$مفتوح في الفضاء ثنائي التبولوجيا ويؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال2 :**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{a,b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{2\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\}\}$$

$$\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\},\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$$

$$\sigma_1\cup\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\},\{2\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

نلاحظ أن $f$ هو تطبيق $N-$مفتوح لأنه:

$$f(X)=Y\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f(\phi)=\phi\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

$$f(a)=\{1\}\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f\{(a,b\})=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

ولكن $f$ ليس $p-$مفتوح لأنه:

$$\exists\{a,b\}\in\tau_1\cup\tau_2;\ f(\{a,b\})=\{1,2\}\notin\sigma_1\cup\sigma_2$$

**ملاحظة٣:**

ليس باالضرورة كل تطبيق $p-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا تطبيقاً $N-$مغلق و يؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال٣:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة:

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=f(c)=2, f(b)=1$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{c\}\},F_1=\{X,\phi,\{b,c\}\},F_2=\{X,\phi,\{a,b\}\}$$

$$\sigma_1=\{Y,\phi\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\}\},J_1=\{Y,\phi\},J_2=\{Y,\phi,\{2\}\}$$

$$\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{c\}\},\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$$

$$F_1\cup F_2=\{X,\phi,\{a,b\},\{b,c\}\},F_1\vee F_2=\{X,\phi,\{a,b\},\{b\},\{b,c\}\}$$

$$\sigma_1\cup\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\}\}$$

$$J_1\cup J_2=\{Y,\phi,\{2\}\},J_1\vee J_2=\{Y,\phi,\{2\}\}$$

نلاحظ أن $f$ هو تطبيق $p-$مغلق لأن:

$$X\in F_1\cup F_2\Rightarrow f(X)=Y\in J_1\cup J_2$$

$$\phi\in F_1\cup F_2\Rightarrow f(\phi)=\phi\in J_1\cup J_2$$

$$\{a,b\}\in F_1\cup F_2\Rightarrow f(\{a,b\})=\{1,2\}=Y\in J_1\cup J_2$$

$$\{b,c\}\in F_1\cup F_2\Rightarrow f(\{b,c\})=\{1,2\}=Y\in J_1\cup J_2$$

ولكن $f$ ليس تطبيق $N-$مغلق لأنه:

$$\exists\{b\}\in F_1\vee F_2;\ f(\{b\})=\{1\}\notin J_1\vee J_2$$

**ملاحظة٤ :**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مغلق تطبيقاً $P-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال٤:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,\ f(b)=2,\ f(c)=3$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{b,c\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{2,3\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1,2\}\}$$

$$F_1=\{X,\phi,\{a\}\},F_2=\{X,\phi,\{a,c\}\},J_1=\{Y,\phi,\{1\}\},J_2=\{Y,\phi,\{3\}\}$$

$$F_1\cup F_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\},J_1\cup J_2=\{Y,\phi,\{1\},\{3\}\}$$

$$F_1\vee F_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\},J_1\vee J_2=\{Y,\phi,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$مغلق وذلك لأنه من أجل:

$$X\in F_1\vee F_2\Rightarrow f(X)=Y\in J_1\vee J_2$$

$$\phi\in F_1\vee F_2\Rightarrow f(\phi)=\phi\in J_1\vee J_2$$

$$\{a\}\in F_1\vee F_2\Rightarrow f(a)=\{1\}\in J_1\vee J_2$$

$$\{a,c\}\in F_1\vee F_2\Rightarrow f(\{a,c\})=\{1,3\}\in J_1\vee J_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس$p$ –مغلق لأنه:

$$\exists\{a,c\}\in F_1\cup F_2;\ f(\{a,c\})=\{1,3\}\notin J_1\cup J_2.$$

**مبرهنة٣:**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ:

$f$ هو $N-$مفتوح$\Leftrightarrow f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq N-\operatorname{int}(f(A));\forall A\subseteq X$ .

البرهان

($\Leftarrow$):بفرض أن $f$ هو $N-$ مفتوح و $A$ مجموعة جزئية كيفية من $X$

ولنبرهن أن $f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq N-\operatorname{int}(f(A))$ .

بما أن $N-\operatorname{int}(A)\subseteq A;\forall A\subseteq X$ محققة دوماً وبأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة فإن $f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq f(A)$ لذلك فحسب خواص داخلية مجموعة من النمط $N$ نجد أن :

$$N-\operatorname{int}(f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq N-\operatorname{int}(f(A))....(1)$$

بما أن $N-\operatorname{int}(A)$ مجموعة $N-$ مفتوحة في $(X,\tau_1,\tau_2)$ومن الفرض $f$ هو تطبيق $N-$ مفتوح. لذلك تكون المجموعة $f(N-\operatorname{int}(A))$ مجموعة $N-$مفتوحة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$لذلك فإن:

$$N-\operatorname{int}(f(N-\operatorname{int}(A)))=f(N-\operatorname{int}(A))$$

نعوض العلاقة السابقة في(١) فنجد أن $f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq N-\operatorname{int}(f(A));\forall A\subseteq X$ .

($\Rightarrow$):لدينا من الفرض $f(N-\operatorname{int}(A))\subseteq N-\operatorname{int}(f(A));\forall A\subseteq X$ ولنبرهن أن $f$ هو $N-$مفتوح.

لتكن $B$ مجموعة $N-$مفتوحة كيفية في $(X,\tau_1,\tau_2)$ ولنبرهن أن $f(B)$ مجموعة $N$-مفتوحة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ عندئذ: $N-\text{int}(B)=B$ وبأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة نجد أن $f(N-\text{int}(B))=f(B)$ وبتطبيق الفرض على المجموعة $B$ نجد أن :

$$f(B)=f(N-\text{int}(B))\subseteq N-\text{int}(f(B))\Rightarrow f(B)\subseteq N-\text{int}(f(B))...(2)$$

نعلم أن العلاقة الأتية محققة دوماً $N-\text{int}(f(B))\subseteq f(B)....(3)$

من العلاقتين(٣) و(٢) نجد أن $f(B)=N-\text{int}(f(B))$

هذا يعني أن $f(B)$ مجموعة $N-$ مفتوحة في الفضاء ثنائي التبولوجيا $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $B$ نجد أن $f$ هو $N-$مفتوح.

**ملاحظة ٥:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N$-مستمر تطبيقاً $N$- مفتوح في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال٥:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة:

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,\ f(b)=2,\ f(c)=3$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{1\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1,2\}\}$$

$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\},\{1,2\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$مستمر لأن:

$$f^{-1}(Y)=X\in\tau_1\vee\tau_2,\ f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_1\vee\tau_2$$

$$f^{-1}(\{1\})=\{a\}\in\tau_1\vee\tau_2,\ f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b\}\in\tau_1\vee\tau_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس $N-$مفتوح لأنه:

$$\exists\{b\}\in\tau_1\vee\tau_2;\ f(\{b\})=\{2\}\notin\sigma_1\vee\sigma_2.$$

**ملاحظة6:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مفتوح تطبيقاً $N-$ مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا ويؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال6:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=f(c)=1,\ f(b)=2$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{b,c\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{1\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\}\}$$

$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$مفتوح لأنه:

$$f(X)=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f(\phi)=\phi\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

$$f(\{a\})=\{1\}\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f(\{b,c\})=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس $N-$مستمر لأنه:

$\exists\{2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2;\ f^{-1}(\{2\})=\{b\}\notin\tau_1\vee\tau_2.$

**مبرهنة ٤:**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً كيفياً عندئذ:

$f$ هو $N-$ مغلق $\Leftrightarrow N-cl(f(A))\subseteq f(N-cl(A));\forall A\subseteq X$ .

البرهان ($\Leftarrow$):

بفرض $f$ هو $N-$مغلق و $A\subseteq X$ مجموعة جزئية كيفية ولنبرهن $N-cl(f(A))\subseteq f(N-cl(A))$ .

بما أنه $A\subseteq N-cl(A);\forall A\subseteq X$ محققة دوماً وبأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة نجد أن $f(A)\subseteq f(N-cl(A))$ وبأخذ لصاقة الطرفين نحصل على العلاقة الأتية

$N-cl(f(A))\subseteq N-cl(f(N-cl(A)))...(1)$

ولكن $N-cl(A)$ مجموعة $N-$مغلقة في $(X,\tau_1,\tau_2)$ والتطبيق $f$ هو $N-$مغلق لذا فإن $f(N-cl(A))$

مجموعة $N-$مغلقة في الفضاء $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ وهذا يعني أن

$f(N-cl((A)))=N-cl(f(N-cl(A))$ بالتعويض في (١) نجد المطلوب $N-cl(f(A))\subseteq f(N-cl(A))$ .

($\Rightarrow$)لدينا من الفرض $N-cl((f(A))\subseteq f(N-cl(A))$ وذلك أياً كانت المجموعة $A$ من نقاط الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ولنبرهن أن $f$ هو $N-$مغلق.

لتكن $F$ مجموعة $N-$مغلقة كيفية في $(X,\tau_1,\tau_2)$ولنبرهن أن $f(F)$ مجموعة $N-$مغلقة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ عندئذٍ: بما أن $F$ مجموعة $N-$مغلقة فإن $F=N-cl(F)$ وبأخذ الصورة المباشرة للطرفين $f(F)=f(N-cl(F))$ وبتطبيق الفرض على المجموعة $F$ نجد أن $N-cl(f(F))\subseteq f(N-cl(F))$ لذلك فإن $N-cl(f(F))\subseteq f(F)$ ولدينا $f(F)\subseteq N-cl(f(F))$ محققة دوماً ومنه نستنتج أن $f(F)=N-cl(f(F))$ .

هذا يعني أن $f(F)$ مجموعة $N-$مغلقة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$وبمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $F$ في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ نجد أن $f$ هو $N-$ مغلق.

**ملاحظة ٧:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مستمر تطبيقاً $N-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا ويؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال ٧:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة:

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{1\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1,2\}\}$$

$$F_1=\{X,\phi,\{b,c\}\},F_2=\{Y,\phi,\{a,c\}\},J_1=\{Y,\phi,\{2,3\}\},J_2=\{Y,\phi,\{3\}\}$$

$$F_1\vee F_2=\{X,\phi,\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\},J_1\vee J_2=\{Y,\phi,\{3\},\{2,3\}\}$$

هذا التطبيق هو $N-$مستمر على $X$ لأن:

$$f^{-1}(Y) = X \in F_1 \vee F_2,\ f^{-1}(\phi) = \phi \in F_1 \vee F_2$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \{c\} \in F_1 \vee F_2,\ f^{-1}(\{2,3\}) = \{b,c\} \in F_1 \vee F_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس $N-$مغلق لأنه:

$$\exists\{a,c\} \in F_1 \vee F_2;\ f(\{a,c\}) = \{1,3\} \notin J_1 \vee J_2.$$

**ملاحظة٨:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مغلق تطبيقاً $N-$ مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال8:**

ليكن $X = \{a,b,c\}, Y = \{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة:

$f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,\ f(b)=2,\ f(c)=3$

$$\tau_1 = \{X,\phi,\{b,c\}\},\tau_2 = \{X,\phi,\{b\}\},\sigma_1 = \{Y,\phi,\{2,3\}\},\sigma_2 = \{Y,\phi,\{1,2\}\}$$

$$F_1 = \{X,\phi,\{a\}\},F_2 = \{X,\phi,\{a,c\}\},J_1 = \{Y,\phi,\{1\}\},J_2 = \{Y,\phi,\{3\}\}$$

$$F_1 \vee F_2 = \{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\},J_1 \vee J_2 = \{Y,\phi,\{1\},(3\},\{1,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$مغلق لأنه :

$$X \in F_1 \vee F_2 \Rightarrow f(X) = Y \in J_1 \vee J_2$$

$$\phi \in F_1 \vee F_2 \Rightarrow f(\phi) = \phi \in J_1 \vee J_2$$

$$\{a\} \in F_1 \vee F_2 \Rightarrow f(\{a\}) = \{1\} \in J_1 \vee J_2$$

$$\{a,c\} \in F_1 \vee F_2 \Rightarrow f(\{a,c\}) = \{1,3\} \in J_1 \vee J_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس $N-$ مستمر لأنه:

$$\exists\{3\} \in J_1 \vee J_2;\ f^{-1}(\{3\}) = \{c\} \notin F_1 \vee F_2.$$

**ملاحظة9:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مغلق تطبيقاً $N-$مفتوح في الفضاء ثنائي التبولوجيا ويؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال9:**

ليكن $X = \{a,b,c\}, Y = \{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,\ f(b)=f(c)=3$

$$\tau_1 = \{X,\phi,\{b\}\},\tau_2 = \{X,\phi,\{a,b\}\},\sigma_1 = \{Y,\phi,\{1,2\}\},\sigma_2 = \{Y,\phi,\{2\}\}$$

$$F_1 = \{X,\phi,\{a,c\}\},F_2 = \{X,\phi,\{c\}\},J_1 = \{Y,\phi,\{3\}\},J_2 = \{Y,\phi,\{1,3\}\}$$

$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X,\phi,\{b\},\{a,b\}\},\sigma_1 \vee \sigma_2 = \{Y,\phi,\{2\},\{1,2\}\}$$

$$F_1 \vee F_2 = \{X,\phi,\{c\},\{a,c\}\},J_1 \vee J_2 = \{Y,\phi,(3\},\{1,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$ مغلق لأنه :

$$f(X)=\{1,3\}\in J_1\vee J_2,\ f(\phi)=\phi\in J_1\vee J_2$$
$$f(\{c\})=\{3\}\in J_1\vee J_2,\ f(\{a,c\})=\{1,3\}\in J_1\vee J_2$$

ولكن $f$ ليس $N-$مفتوح لأنه:

$$\exists\{b\}\in\tau_1\vee\tau_2;\ f(\{b\})=\{3\}\notin\sigma_1\vee\sigma_2.$$

**ملاحظة١٠:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مفتوح تطبيقاً $N-$ مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال10:**

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1,\ f(b)=f(c)=2$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{b\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{a,b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{1,2\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\}\}$$
$$F_1=\{X,\phi,\{a,c\}\},F_2=\{X,\phi,\{c\}\},J_1=\{Y,\phi,\{3\}\},J_2=\{Y,\phi,\{1,3\}\}$$
$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{2\},\{1,2\}\}$$
$$F_1\vee F_2=\{X,\phi,\{c\},\{a,c\}\},J_1\vee J_2=\{Y,\phi,\{3\},\{1,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$ مفتوح وذلك لأنه:

$$f(X)=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f(\phi)=\phi\in\sigma_1\vee\sigma_2$$
$$f(\{b\})=\{2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2,\ f(\{a,b\})=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

ولكن $f$ ليس $N-$مغلق لأنه:

$$\exists\{c\}\in F_1\vee F_2;\ f(\{c\})=\{2\}\notin J_1\vee J_2.$$

**السؤال الأن متى يكون كل تطبيق $N-$مفتوح هو $N-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا وبالعكس؟**

**الإجابة على هذا السؤال في المبرهنة الأتية :**

**مبرهنة٥:**

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تقابل كيفي عندئذ:

$f$ تطبيق $N-$مغلق $\Leftrightarrow$ $f$ تطبيق $N-$مفتوح في الفضاء ثنائي التبولوجيا.

البرهان

($\Leftarrow$:)بفرض أن $f$ تطبيق $N-$ مغلق وتقابل ولنبرهن أنه تطبيق $N-$ مفتوح.

لتكن $T$ مجموعة $N-$مفتوحة في $X$ ولنبرهن أن $f(T)$ مجموعة $N-$مفتوحة في $Y$

بما أن $T$مجموعة $N-$مفتوحة في $X$ فإن $X\setminus T$ مجموعة $N-$مغلقة في $X$

ولدينا أيضاً $f$ تطبيق $N-$ مغلق فإن المجموعة $f(X\setminus T)$ مجموعة $N-$مغلقة في $Y$

كما نعلم أن $f(X\setminus T)=f(X)\setminus f(T)=Y\setminus f(T)$ وذلك لأن $f$ تقابل.

أي أن المجموعة $Y\setminus f(T)$ مجموعة $N-$مغلقة في $Y$ وبالتالي المجموعة $f(T)$ مجموعة $N-$ مفتوحة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $T$ حيث $T\in\tau_1\cup\tau_2$ نجد أن التطبيق $f$ هو $N-$مفتوح.

($\Longrightarrow$)لدينا بالفرض $f$ تطبيق $N-$ مفتوح ولنبرهن أنه $N-$مغلق.

لتكن $F$مجموعة $N-$ مغلقة كيفية في $X$ولنبرهن أن $f(F)$ مجموعة $N-$مغلقة في $Y$

وبما أن $F$مجموعة $N-$مغلقة في $X$ فإن $X \setminus F$ مجموعة $N-$مفتوحة في $X$

ولدينا أيضاً التطبيق $f$ هو تطبيق $N-$ مفتوح فإن المجموعة $f(X \setminus F)$ مجموعة $N-$ مفتوحة في $Y$

فإن $f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F) = Y \setminus f(F)$ وذلك لأن $f$ تقابل

ومنه نجد أن المجموعة $Y \setminus f(F)$ مجموعة $N-$مفتوحة في $Y$ وبذلك تكون المجموعة $f(F)$ مجموعة $N-$ مغلقة في $Y$،بعد مراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $F$ من أسرة المجموعات $N-$ المغلقة في $(X, \tau_1, \tau_2)$ نجد أن التطبيق $f$ هو $N-$مغلق.

**ملاحظة١١:**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$ مفتوح و $N-$مغلق في آن واحد تطبيقاً $N-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا ويؤكد ذلك المثال الآتي:

**مثال11:**

ليكن $X = \{a,b,c\}, Y = \{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, \sigma_1, \sigma_2) \text{ حيث } f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$$

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{b,c\}\}, \tau_2 = \{X, \phi, \{b\}\}, \sigma_1 = \{Y, \phi, \{2,3\}\}, \sigma_2 = \{Y, \phi, \{1,2\}\}$$

$$F_1 = \{X, \phi, \{a\}\}, F_2 = \{X, \phi, \{a,c\}\}, J_1 = \{Y, \phi, \{1\}\}, J_2 = \{Y, \phi, \{3\}\}$$

$$\tau_1 \vee \tau_2 = \{X, \phi, \{b\}, \{b,c\}\}, \sigma_1 \vee \sigma_2 = \{Y, \phi, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$$

$$F_1 \vee F_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,c\}\}, J_1 \vee J_2 = \{Y, \phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$مغلق لأنه:

$$f(X) = Y \in J_1 \vee J_2,\ f(\phi) = \phi \in J_1 \vee J_2$$

$$f(\{a\}) = \{1\} \in J_1 \vee J_2,\ f(\{a,c\}) = \{1,3\} \in J_1 \vee J_2$$

أيضاً التطبيق $f$ هو $N-$ مفتوح لأنه:

$$f(X) = Y \in \sigma_1 \vee \sigma_2,\ f(\phi) = \phi \in \sigma_1 \vee \sigma_2$$

$$f(\{b\}) = \{2\} \in \sigma_1 \vee \sigma_2,\ f(\{b,c\}) = \{2,3\} \in \sigma_1 \vee \sigma_2$$

ومنه نجد أن $f$ هو تطبيق $N-$ مفتوح و $N-$مغلق في آن واحد ولكنه ليس $N-$ مستمر وذلك لأنه :

$$\exists \{1,2\} \in \sigma_1 \vee \sigma_2;\ f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b\} \notin \tau_1 \vee \tau_2.$$

**ملاحظة(12):**

ليس بالضرورة كل تطبيق $N-$مستمر تطبيقاً $N-$مفتوح و $N-$مغلق في آن واحد في الفضاء ثنائي التبولوجيا و يؤكد ذلك المثال الأتي:

**مثال(12):**

ليكن $X = \{a,b,c\}, Y = \{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق $f$ بالعلاقة :

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3$

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\},\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\},\sigma_1=\{Y,\phi,\{1\}\},\sigma_2=\{Y,\phi,\{1,2\}\}$$

$$\tau_1\vee\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\sigma_1\vee\sigma_2=\{Y,\phi,\{1\},\{1,2\}\}$$

$$F_1\vee F_2=\{X,\phi,\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\},J_1\vee J_2=\{Y,\phi,\{3\},\{2,3\}\}$$

نلاحظ أن التطبيق $f$ هو $N-$ مستمر لأنه:

$$f^{-1}(Y)=X\in\tau_1\vee\tau_2,\ f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_1\vee\tau_2$$

$$f^{-1}(\{1\})=\{a\}\in\tau_1\vee\tau_2,\ f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b\}\in\tau_1\vee\tau_2$$

ولكن التطبيق $f$ ليس $N-$مفتوح لأنه:

$$\exists\{b\}\in\tau_1\vee\tau_2; f(\{b\})=\{2\}\notin\sigma_1\vee\sigma_2.$$

وليس $N-$مغلق لأنه:

$$\exists\{a,c\}\in F_1\vee F_2; f(\{a,c\})=\{1,3\}\notin J_1\vee J_2.$$

**مبرهنة٦:**

إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تقابلاً كيفياً عندئذ الشروط الأتية متكافئة:

(1).التطبيق $f$ هو $N-$ هوميومورفيزم.

(2).التطبيق $f$ هو $N-$مستمر و $N-$مفتوح.

(3).التطبيق $f$ هو $N-$مستمر و $N-$مغلق.

البرهان

$(1)\Leftarrow(2)$: بما أن $f$ هو $N-$ هوميومورفيزم بالفرض فإن $f$ هو $N-$مستمر على $X$ ولنبرهن أن $f$ هو $N-$مفتوح.

لتكن $A$ مجموعة جزئية مفتوحة كيفية من النمط $N$ في الفضاء $(X,\tau_1,\tau_2)$ ولنبرهن أن $f(A)$ مجموعة $N-$ مفتوحة في $Y$ وبما أن $f^{-1}$ التابع العكسي للتابع $f$ هو $N-$مستمر على $Y$ ولدينا من الفرض التطبيق $f$ هو $N-$هوميومورفيزم فإن $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$ هي $N-$مفتوحة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ وبما أن $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)=f(A)$ هذا يعني أن $f(A)$ هي $N-$مفتوحة في $(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $A$ من $X$ فإن $f$ هو $N-$ مفتوح.

$(2)\Leftarrow(3)$: بما أن $f$ هو $N-$مستمر على $X$ بقي البرهان على أن $f$ هو $N-$مغلق وحسب المبرهنة السابقة رقم (5) وبما أن $f$ تقابل فإن $f$ هو $N-$مغلق.

$(3)\Leftarrow(1)$: من الفرض لدينا $f$ هو $N-$مستمر على $X$ فحسب المبرهنة السابقة رقم (٢) نجد أن $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A));A\subseteq X...(*)$ وبما أن $f$ هو $N-$مغلق فحسب المبرهنة رقم(4) نجد أن $N-cl(f(A))\subseteq f(N-cl(A));A\subseteq X...(**)$

من $(*)$ و$(**)$ نجد أن $N-cl(f(A))=f(N-cl(A));A\subseteq X$ .

$N-cl(f(A))=f(N-cl(A));A\subseteq X$ فحسب المبرهنة رقم (1) نجد أن $f$ هو $N-$ هوميومورفيزم.

## الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بتعريف التطبيق $N-$مفتوح والتطبيق $N-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا

وتوصلنا إلى بعض الخواص التي يتمتع بها التطبيق $N-$مفتوح والتطبيق $N-$مغلق في الفضاء ثنائي التبولوجيا، كما توصلنا إلى إيجاد شرط لازم وكافي كي يكون التطبيق $f$ هو $N-$مفتوح ( $N-$مغلق) في الفضاء ثنائي التبولوجيا.

نوصي بمتابعة هذا العمل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا ومحاولة تعريف أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة(المغلقة) وتعريف التطبيقات المستمرة (المفتوحة ، المغلقة) المناسبة لها ودراسة العلاقة بينها وبين تطبيقات معرفة سابقاً.

## المراجع:


[1]- Abbas ,F .,*On h-open sets and h-continuous functions* , Johannes kepler University .Linz-Austria. 2021, MSC code:54A40.

[2]-Abdalbaqi,L ;Mousa,H ., *On open set and continuous function in topological spaces* ,Int.J.Nonlinear Anal.Appl , vol (13). 2022, No. 1, p . 737-744.

[3]- Al-Bsoul ,A ;Tallafha,A ., *Countable dense homogeneous bitopological spaces* , Tr.J.Math., vol (23). 1999 , p . 233-242.

[4]- Al-Nafie ,Z .,*On $\delta\psi-p-$continuous functions in bitopological spaces*,Journal of babylon University /pure and applied sciences, vol (21). 2013, No. 3.

[5]- Benitez ,J ;Caney ,S., *On semi- continuous functions* ,The Manila Jourmal ofscience., vol (4) . 2001, No. 2.

[6]- Carpintero ,C ;Rosas ,E., *Almost $w-$continuous function defined by $w-$open sets due to Arhangel'skii* ,cubo a mathematical., vol (19) . 2017, No. 1, p . 01-15.

[7]- El-Sheikh ,S ;Tantawy , O., *Generalized locally pairwise closed sets on bitopological spaces and some of its properties* ,Journal of the Egyptian mathematicalsociety., vol (26) . 2018, Issue. 1.

[8]- Jabbar ,N ;Nasir ,A., *Some types of compactness in bitopological spaces* ,IBN AL-HAITHAM J .For pure and APPL SCI., vol (23) . 2010, No. 1.

[9]- Kelly,J,*Bitopological Spaces,Broc.london Math*. Soc., Vol(13).1963,No.3,P.71-89.

[10]- Kothandapanan ,M ;Ravikumar ,R., $(\tau,\tau\square)^*\square g^*r^*$ *continuous functions*, International journal of pure and Applied Mathematics., vol (94) . 2014, No. 3, p .425-438.

[11]- Kilikcman ,A ;Salleh ,Z., *Anote on pairwise continuous mappings and bitopological spaces* ,European journal of pure and applied mathematics., vol (2) .

2009,No.3, p . 325-337.

[12]– عفيصة ، براءة .؛ *التطبيقات المستمرة من النمط $N$ في الفضاء ثنائي التبولوجيا* .جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الاساسية. المجلد 45 ،العدد (3) ، (2023)

[13] – غريبة ، طالب.؛الحميدوا ،*رياض . دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا* ، أطروحة دكتوراه 2019 . جامعة البعث.

[14] – شلاح ، مروى .؛*الفضاءات ثنائية التبولوجيا وبعض تطبيقات التبولوجيا في العلوم الأخرى* .رسالة ماجستير . 2022. جامعة تشرين.