مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٤) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (4) 2025

دراسة حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الأسرة $\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^2 + 4m}\right)$

الدّكتور احمد عيسى *

(تاريخ الإيداع ٣٠/٩/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر ٤/١٢/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

نُقدّم في هذا العمل حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل التّربيعيّ الحقيقيّ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حيث $D = 169m^2 + 4m$ عدد صحيح حرّ من التّربيع و $m \equiv 10 \pmod{13}$ عدد صحيح موجب فردي، والأدوات الرئيسية المستخدمة هي قيم خاصة لدوال زيتا لصفوف الإيديال للحقول التربيعية الحقيقية المعنية.

الكلمات المفتاحيّة: الحقل التّربيعيّ، زمرة الصّفوف، تابع زيتا.

* مدرس– قسم الرّياضيات– كليّة العلوم– جامعة طرطوس– طرطوس– سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٤) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (4) 2025

On a lower bound for the order of class group of the family $\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^2+4m}\right)$

Dr. Ahmad Issa *

(Received 30/9/2025.Accepted 4/12/2025)

□ABSTRACT □

In this work, we present a lower bound for the order of class group of real quadratic field $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$, where $D = 169m^2 + 4m$ is a square-free integer and $m \equiv 10 \ (mod\ 13)$ be an odd positive integer. The main tools used are special values of zeta functions for ideal classes of the respective real quadratic fields.

Keywords: Quadratic field, Class group, Zeta function.

* Assistanat Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Tartous, Tartous, Syria.

مقدّمة:

يُعدّ الجبر فرعاً من أقدم فروع الرّياضيّات البحتة، وله دور مهم في عملية تطوير الرّياضيّات بفروعها البحتة والتّطبيقيّة، كما أنّه يسهم مساهمةً فعّالة في حلّ كثيرٍ من المسائل المطروحة في هذا العصر في ميادين عدّة من العلوم والتّطور في علم الجبر أدّى إلى ظهور مفهوم البنى الجبريّة، والتي تُعرّف بأنّها: مجموعات غير خالية مزوّدة بعمليّات ثنائيّة تُعطى أسماء بحسب الخواص الّتي تُحقّقها هذه العمليّات (الزّمر – الحلقات – .....). تاريخيّاً، تعدّ الزّمرة أوّل الأمثلة على البنى الجبريّة المجرّدة وهي أساسيّة في معظم فروع الجبر الحديثة.

ندرس في هذا العمل زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات واختصاراً (زمرة الصّفوف) للحقول التّربيعيّة والتي تُعد من المواضيع الهامّة في الرّياضيات، ولذلك انصبّ اهتمام الباحثين على دراستها منذ مئات السّنين وحتّى يومنا هذا، فقد خصّصوا وما زالو يخصّصون الكثير من الوقت للعمل في هذا المجال في معاهد الرّياضيات ومراكز البحوث المتقدّمة والمنتشرة في جميع أنحاء العالم.

هناك الكثير من المسائل المتعلّقة بهذه الزّمرة (تحديد الرّتبة – دراسة حدّ أدنى للرّتبة – دراسة حدّ أعلى للرّتبة – تّصنيف زمر الصّفوف حسب الرّتبة....) لم تُحلّ حتّى الآن إلّا في بعض الحالات الخاصّة.

فيما يخصّ دراسة حدٍّ أدنى لرتبة زمرة الصّفوف فقد تمّ دراسة حدّ أدنى لرتبة زمرة الصّفوف لحقول تربيعيّة حقيقيّة معيّنة (انظر **[3,4,5,11,12,17,18,19,21,22]**) و حديثاً جداً

- ❖ درس Chakraborty وآخرون **[9]** حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+1}\right)$.
- ❖ درس Mahapatra وآخرون **[16]** حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{9m^{2}+4m}\right)$.
- ❖ درست Jihny وآخرون **[13]** حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{49m^{2}+4m}\right)$.

في هذا البحث درسنا حدّاً أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حيث $D=169m^{2}+4m$ حيث بيّنا أن رتبة زمرة الصفوف لهذه الأسرة أكبر أو تساوي ٣.

أهميّة البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى تقديم حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^{2}+4m}\right)$، وتكمن أهميّة الحدّ الأدنى لرتبة الزّمرة من جهة أولى في البحث عن رتبة الزّمرة وذلك عن طريق حصر الرّتبة بين حدّ أدنى وحدّ أعلى ومن جهة أخرى الحدّ الأدنى له دور في تّصنيف زمر الصّفوف حسب الرّتبة، وهذا يسهم في تبسيط الدّراسات وتسهيلها في كثير من الأحيان.

طرائق البحث وموادّه

في هذا البحث نستفيد من:

- تحليل الإيديال الرّئيسيّ المولد بالعدد ١٣ في حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة للحقل التربيعي $\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^{2}+4m}\right)$
- مجموع ديدكند المعمّم.
- دوال التّابع زيتا لصفوف الإيديالات.

❖ نعرض فيما يأتي بعضاً من التّعاريف والتّمهيديات والأفكار التي اعتمدنا عليها في هذا البحث.

تعاريف ومفاهيم أساسيّة

تعريف 1: [6]

يُعرّف الحقل التّربيعيّ $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حيث $D\neq 0,1$ عدد صحيح حرّ من التّربيع، بالشّكل:

$$k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})=\{a+b\sqrt{D}\ ;\ a,b\in\mathbb{Q}\}$$

حيث $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسريّة.

وإذا كان $D>0$ فإنّ k يُسمّى حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً، وإذا كان $D<0$ فإنّ k يُسمّى حقلاً تربيعيّاً تخيّلياً، وتُعرّف حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة $\mathcal{O}_k$ للحقل $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ بالشّكل التّالي:

$$\mathcal{O}_k=\begin{cases}\mathbb{Z}[\sqrt{D}]=\{a+b\sqrt{D}\,;a,b\in\mathbb{Z}\}\ ; & D\not\equiv 1\ (mod\ 4),\\ \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right]=\left\{a+b\left(\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right)\,;a,b\in\mathbb{Z}\right\}; & D\equiv 1\ (mod\ 4).\end{cases}$$

القاعدة لحلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة $\mathcal{O}_k$ تُسمى قاعدة صحيحة لـ k ويُعرّف مميّز الحقل

$$k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$$

بأنّه مميز أيّ قاعدة صحيحة لـ k، وسنرمز للمميز بالرمز Δ (للمزيد من المعلومات حول مميز الحقل يُرجى الاطلاع على المرجع **[1]**)، تم الإثبات على أنّ مميز الحقل التربيعي $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ يُعطى بالصيغة التالية

$$\Delta=\begin{cases}4D; & D\not\equiv 1\ (mod\ 4),\\ D; & D\equiv 1\ (mod\ 4).\end{cases}$$

تعريف 2: [10]

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حقل تربيعي و $\alpha=a+b\sqrt{D}\in k$ عندئذٍ

- يُعرّف مرافق α ويرمز له بالرّمز $\acute{\alpha}$، بالشّكل:

$$\acute{\alpha}=a-b\sqrt{D}$$

- يُعرّف نظيم α ويرمز له بالرّمز $N(\alpha)$، بالشّكل:

$$N(\alpha)=\alpha\acute{\alpha}=(a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})=a^2-Db^2$$

- يُعرّف أثر α ويرمز له بالرّمز $Tr(\alpha)$، بالشّكل:

$$Tr(\alpha)=\alpha+\acute{\alpha}=2a$$

تعريف 3: [10]

ليكن k حقلاً تربيعيّاً، عندئذٍ زمرة الواحدات (العناصر القابلة للقلب) في الحلقة $\mathcal{O}_k$ تُعطى بالصّيغة التّالية:

$$\mathcal{O}_k^{\times}=\{\alpha\in\mathcal{O}_k\,;|N(\alpha)|=1\}$$

وفي حال كان k حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً، عندئذٍ أصغر واحدة في $\mathcal{O}_k^{\times}$ أكبر تماماً من الواحد تُسمّى الواحدة الأساسيّة للحقل k، ويرمز لها بالرّمز ε.

تعريف ٤: [8]

الحقل التّربيعيّ الحقيقيّ $k=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ يُسمّى حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً من النّمط Richaud-Degert إذا حقّق الشّروط التّالية:

١. $D=n^2+r\neq 5$ عدداً صحيحاً موجباً حرّاً من التّربيع.

٢. $-n<r\leq n$.

٣. $r\mid 4n$.

تمهيديّة ١: [8]

ليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حقل تربيعيّ حقيقيّ من النّمط Richaud-Degert عندئذٍ الواحدة الأساسيّة ε ونظيمها $N(\varepsilon)$ تُعطى في الحالات التّالية كما يلي:

$$\varepsilon=n+\sqrt{n^{2}+r}\ ,N(\varepsilon)=-sgn\,r\ \ if\ |r|=1$$

$$\varepsilon=\frac{n+\sqrt{n^{2}+r}}{2}\ ,N(\varepsilon)=-sgn\,r\quad if\ |r|=4$$

$$\varepsilon=\frac{2n^{2}+r}{|r|}+\frac{2n}{|r|}\sqrt{n^{2}+r}\,,N(\varepsilon)=1\ \ if\ |r|\neq 1,4$$

حيث الرمز $sgn\,r$ يدل على إشارة العدد r.

تعريف ٥: [1]

لتكن R ساحة صحيحة و k حقل نسب R عندئذٍ

المجموعة P الجزئيّة والغير خالية من k والمحققة للشّروط التّالية:

- $\forall\ \alpha,\beta\in P\ \ \Rightarrow\alpha+\beta\in P$ (P مغلقة بالنسبة لعملية الجمع)
- $\forall\ \alpha\in P\ \ \&\ r\in R\Rightarrow r\alpha\in P$
- يوجد $0\neq\lambda\in R$ بحيث $\lambda P\subseteq R$

تُسمّى إيديال كسريّ في R، وإذا كانت المجموعة P جزئيّة وغير خالية من R وتحقّق الشّروط الثّلاثة السّابقة عندئذٍ P يُسمّى إيديال صحيح فيR.

ننوّه إلى أنّ كلّ إيديال صحيح في الساحة الصحيحة R الذي حقل نسبها k هو إيديال كسري في R.

تعريف ٦: [1]

يُعرّف نظيم الإيديال الصّحيح I في $\mathcal{O}_k$ بالشّكل التّالي:

$$N(\mathrm{I})=Card\left({}^{\mathcal{O}_k}\!/_{\mathrm{I}}\right)$$

أي أن نظيم الإيديال الصّحيح I في $\mathcal{O}_k$ هو رتبة عامل الحلقة ${}^{\mathcal{O}_k}\!/_{\mathrm{I}}$.

تمهيديّة ٢: [1]

ليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حقلاً تربيعيّاً حيث $D\equiv 1\ (mod\ 4)$ ولتكن a,b,c أعداد صحيحة بحيث $a\neq 0$، $c\neq 0$ و$b\equiv c\ (mod\ 2)$ عندئذٍ

a) $\left\{a,\frac{b+c\sqrt{D}}{2}\right\}$ قاعدة للإيديال الصّحيح $\langle a,\frac{b+c\sqrt{D}}{2}\rangle$ إذا وفقط إذا كان $c\mid a$، $c\mid b$ و $4ac\mid(b^2-Dc^2)$

b) إذا كان $c\mid a$، $c\mid b$ و $4ac\mid(b^2-Dc^2)$ عندئذٍ $N\left(\langle a,\frac{b+c\sqrt{D}}{2}\rangle\right)=|ac|$.

❖ هناك تعريف لزمرة صفوف تكافؤ الإيديالات في حقول الأعداد الجبريّة بشكل عام **[1]**، ولكن معظم الدّراسات تهتم بدراسة مسألة رتبة زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات في حقول الأعداد التّربيعيّة، لذلك سنقدّم الآن تعريف زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقول التّربيعيّة.

تعريف ٧ : [1]

ليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حقل تربيعيّ و $\mathcal{O}_k$ حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة للحقل التربيعي k ولتكن $I(k)$ مجموعة كلّ الإيديالات الكسريّة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$ والتي تشكّل زمرة تبديليّة بالنسبة للضّرب.

$P(k)$ مجموعة كلّ الإيديالات الرّئيسيّة في $I(k)$ والتي تشكّل زمرة جزئيّة ناظميّة في $I(k)$ عندئذٍ المجموعة التالية

$$C_k={}^{I(k)}\!/_{P(k)}=\{\mathfrak{a}P(k)\ ;\ \mathfrak{a}\in I(k)\}=\{[\mathfrak{a}]\ ;\ \mathfrak{a}\in I(k)\}$$

تشكّل زمرة تبديليّة بالنسبة لعملية جداء الصفوف، وتُسمّى بزمرة صفوف تكافؤ الإيديالات واختصاراً زمرة الصّفوف (Class group) للحقل k، العنصر الحياديّ في C_k هو $P(k)$ ويّسمّى بصف الإيديال الرّئيسيّ للحقل k، وسنرمز لهذا الصّف بـ A ولبقية الصّفوف في هذه الزّمرة بالرّموز $B,C,\dots$.

بما أنّ C_k زمرة بالنسبة لعملية جداء الصفوف عندئذ لكلّ عنصر M من C_k معكوس (مقلوب) في C_k بالنسبة لعملية الجداء، سنرمز لمعكوس M بالرمز M^{-1} حيث $MM^{-1}=P(k)=A$، ولقد برهن Minkowski بعد سلسلة من النّظريات أنّ الزّمرة C_k منتهية، ولنرمز لرتبة هذه الزّمرة بـ $h(D)$.

تعريف ٨: التابع زيتا ديدكند– صف التابع زيتا: [10]

ليكن k حقلاً تربيعيّاً، عندئذٍ

- يُعرّف التّابع زيتا ديدكند للحقل k بالشّكل:

$$\zeta_k(s)=\sum_{I\in J_k}\frac{1}{(N(I))^s}$$

علماً أنّ s عدد عقدي و J_k مجموعة كلّ الإيديالات الصّحيحة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$.

- يُعرّف صفّ التّابع زيتا $\zeta_k(s,\mathrm{H})$ حيث $\mathrm{H}\in C_k$ بالصّيغة التّالية:

$$\zeta_k(s,\mathrm{H})=\sum_{I\in J_k\,;[I]=H}\frac{1}{(N(I))^s}$$

علماً أنّ المجموع مأخوذ من أجل جميع الإيديالات الصّحيحة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$ والواقعة في الصّف H.

تمهيديّة 3: [10]

ليكن k حقلاً تربيعيّاً و C_k زمرة الصّفوف للحقل k عندئذٍ

$$\zeta_k(s)=\sum_{\mathrm{H}\in C_k}\zeta_k(s,\mathrm{H})$$

❖ قدّم الباحث Siegel **[20]** طريقةً لحساب $\zeta_k(1-2n)$ حيث n عدد صحيح موجب، وفي حالة $n=1$ نحصل على صيغة Zagier التّالية:

تمهيديّة ٤: [23]

ليكن k حقل أعداد تربيعيّ حقيقيّ مميّزه Δ عندئذٍ

$$\zeta_k(-1)=\frac{1}{60}\sum_{\substack{|t|<\sqrt{\Delta}\\ t^2\equiv\Delta\ (mod\ 4)}}\sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right)$$

حيث $\sigma(r)$ مجموع القواسم الموجبة لـ r.

تعريف ٩: [15]

تُعطى أعداد برنولي B_n حيث $n \in \mathbb{N}$ من الصيغة التالية

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \,; B_0 = 1 \,\&\, n \geq 2.$$

نلاحظ أنّ

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}$$

تعريف ١٠:[2,13]

ليكن a, c أعداد صحيحة، عندئذ يُعرّف مجموع ديدكند المعمّم $S_{2n}^{r}(a,c)$

حيث $n = 2, 3, \dots$ و $r = 0, 1, 2, \dots, 2n$ بالصّيغة التّالية:

$$S_{2n}^{r}(a,c) = \sum\nolimits_{\mu \,(mod\, c)} P_{2n-r}\left(\frac{\mu}{c}\right) P_r\left(\frac{a\mu}{c}\right)$$

حيث المجموع مأخوذ من أجل جميع البواقي الموجبة (μ) على العدد c، أي أنّ μ تأخذ جميع القيم في المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \dots, |c|\}$ و

$$P_t(x) = \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} B_s(\{x\})^{(t-s)}$$

حيث B_s أعداد برنولي و $\{x\}$ ترمز إلى الجزء الكسري من العدد الحقيقي x.

بشكل خاص نلاحظ بأنّ

$$P_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}$$

$$P_3(x) = \{x\}^3 - \frac{3}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}$$

في حالة $n = 2$ نحصل على $S_4^r(a,c)$ واختصاراً $S^r(a,c)$ وهو مجموع ديدكند المعمم الذي نهتم به في هذا العمل

$$S^r(a,c) = S_4^r(a,c) = \sum\nolimits_{\mu \,(mod\, c)} P_{4-r}\left(\frac{\mu}{c}\right) P_r\left(\frac{a\mu}{c}\right)$$

نلاحظ مثلاً أنّ $S^3(1,3) = -\frac{1}{81}$

تمهيدية ٥: [7,8]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً مميّزه Δ وليكن:

- $\mathrm{H} \in C_k$ و $\mathrm{I} \in \mathrm{H}^{-1}$ إيديال صحيح يملك القاعدة $\{r_1, r_2\}$
- $\delta(\mathrm{I}) = r_1\, \acute{r}_2 - \acute{r}_1\, r_2$ حيث $\acute{r}_1$ و $\acute{r}_2$ مرافقات r_1 و r_2 على الترتيب
- ε الواحدة الأساسيّة للحقل k

عندئذٍ $\{\varepsilon r_1, \varepsilon r_2\}$ قاعدة للإيديال I بالتالي

$$\varepsilon \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathrm{M} \, . \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

حيث $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة تُعطى بالصّيغة التّالية:

$$a = Tr\left(\frac{r_1 \acute{r}_2 \varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right), \quad b = Tr\left(\frac{r_1 \acute{r}_1 \acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I})}\right)$$
$$c = Tr\left(\frac{r_2 \acute{r}_2 \varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right), \quad d = Tr\left(\frac{r_1 \acute{r}_2 \acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I})}\right)$$

وأكثر من ذلك $\det \mathrm{M} = N(\varepsilon)$ و $bc \neq 0$.

❖ بالحفاظ على الرّموز المذكورة في التّمهيدية ٥، نحصل على صيغة Lang لحساب $\zeta_k(-1,\mathrm{H})$.

تمهيديّة 6: [7,8,14]

$$\zeta_k(-1,\mathrm{H}) = \frac{(sgn\ \delta(\mathrm{I}))\ r_2 \acute{r}_2}{360\ N(\mathrm{I}) c^3}\{(a+d)^3 - 6(a+d)N(\varepsilon)$$
$$-240c^3(sgn\ c)S^3(a,c) + 180ac^3(sgn\ c)S^2(a,c)$$
$$-240c^3(sgn\ c)S^3(d,c) + 180dc^3(sgn\ c)S^2(d,c)\},$$

حيث $N(\mathrm{I})$ نظيم الإيديال I و$N(\varepsilon)$ نظيم الواحدة الأساسيّة ε و $sgn\ r$ إشارة r.

تمهيديّة ٧: [8]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حقل تربيعيّ حقيقيّ من النّمط Richaud-Degert و A صفّ الإيديال الرّئيسيّ للحقل k و$D = n^2 + r \equiv 1\ (mod\ 4)$ و $|r| \neq 1, 4$ عندئذٍ

$$\zeta_k(-1,A) = \begin{cases} \dfrac{2n^3(r^2+1) + n(3r^3+50r^2+3r)}{720r^2} & if\ n\ even \\ \dfrac{2n^3(r^2+16) + n(3r^3+20r^2+48r)}{720r^2} & if\ n\ odd \end{cases}$$

تعريف ١1: [1]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حقل تربيعيّ حقيقيّ حيث D عدد صحيح حرّ من التّربيع، وليكن p عدداً أولياً عندئذٍ

❖ يُقال بأنّ العدد الأولي p ينفصل (Split) في k إذا كان
$$\langle p \rangle = P_1 P_2$$
حيث P_1, P_2 إيديالان أوليان في $\mathcal{O}_k$.

❖ يُقال بأنّ العدد الأولي p يتفرع (Ramify) في k إذا كان
$$\langle p \rangle = P^2$$
حيث P إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$.

❖ يُقال بأنّ العدد الأولي p جامد (Inert) في k إذا كان
$$\langle p \rangle = P$$
حيث P إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$.

ونُذكّر القارئ هنا بأن I إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$ إذا تحقق الشرط التالي
$$\forall\ x, y \in \mathcal{O}_k;\ xy \in I \Longrightarrow x \in I\ or\ y \in I$$

تعريف 12: [6]

ليكن p عدداً أولياً فرديّاً و a عدداً صحيحاً، فإنّ الرّمز $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ يُسمّى رمز ليجندر، وهو يرمز للتّابع:

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right):\mathbb{Z}\longrightarrow\{-1,0,1\}$$

المعرّف بالشّكل:

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right)(a)=\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & if\ a\ is\ a\ quadratic\ residue\ modulo\ p\\ -1 & if\ a\ is\ not\ a\ quadratic\ residue\ modulo\ p\\ 0 & if\ p\mid a\end{cases}$$

ومن الخواص الشهيرة لدالة ليجندر :

إذا كان p عدداً أوليّاً فرديّاً، و$a,b\in\mathbb{Z}$، عندئذٍ:

- إذا كان $a\equiv b\ (mod\ p)$ فإنّ $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$.
- $\left(\frac{1}{p}\right)=1$.

تمهيديّة ٨: [1]

ليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حقلاً تربيعيّاً و p عدداً أوليّاً عندئذٍ:

$$\langle p\rangle=\begin{cases}P_1P_2 \quad if\ \left(p>2\ \&\left(\frac{D}{p}\right)=1\right)\ or\ \left(\ p=2\ \ and\ D\equiv 1\ (mod\ 8)\right),\\ P^2\quad if\ (\ p>2\ \&\ p\mid D)\ \ or\ \left(\ p=2\ \ and\ D\equiv 2,3\ (mod\ 4)\right),\\ P\quad if\ \left(p>2\ \&\ \left(\frac{D}{p}\right)=-1\right)\ \ or\ \left(\ p=2\ and\ D\equiv 5\ (mod\ 8)\right).\end{cases}$$

حيث P_1,P_2,P إيديالات أوّليّة في $\mathcal{O}_k$ و$\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ رمز ليجندر.

النّتائج والمناقشة:

قبل أن نبدأ بمناقشة النتائج سوف نستنتج بعض المعلومات المتعلقة بالأسرة $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حيث $D=169m^{\,2}+4m$ عدد صحيح موجب حرّ من التربيع علماً أنّ $m\equiv 10\ (mod\ 13)$.

- نلاحظ بأنّ m عدد فردي لأنه لو كان m عدد زوجي لكان D ليس حرّ من التربيع وهذا مخالف للفرض.
- نلاحظ بأنّ $D\equiv 1\ (mod\ 4)$ و التعليل بالشكل التالي:

بما أنّ m عدد فردي عندئذٍ $m\equiv 1\ or\ 3\ (mod\ 4)$ عندئذٍ $m^{\,2}\equiv 1\ (mod\ 4)$

و $4m\equiv 0\ (mod\ 4)$ عندئذٍ

$$D=169m^{\,2}+4m\equiv 1\ (mod\ 4)$$

- بما أنّ $D\equiv 1\ (mod\ 4)$ عندئذ $\mathcal{O}_k=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$ بالاعتماد على التعريف ١.
- الواحدة الأساسيّة ε للحقل k هي $\varepsilon=\frac{169m+2+13\sqrt{D}}{2}$ ونظيمها $N(\varepsilon)=1$ وذلك بالاعتماد على التمهيديّة ١.
- ليكن A صف الإيديال الرئيسي للحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^{\,2}+4m}\right)$ عندئذٍ

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{2197m^3+78m^2+2327m+78}{360}$$

وذلك بالاعتماد على التمهيدية ٧.

- ❖ سنقدم في المبرهنة التّالية تحليل الإيديال الرّئيسيّ $\langle 13\rangle=13\mathcal{O}_k$ في $\mathcal{O}_k$ للحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^{\,2}+4m}\right)$.

مبرهنة 1:

ليكن $m \equiv 10 \pmod{13}$ عدد صحيح موجب فردي، وليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حيث $D = 169m^2 + 4m$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع عندئذٍ

$$\langle 13\rangle = \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle \langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\rangle$$

حيث

$$\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle \text{ و } \langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\rangle$$

إيديالان أوليان في $\mathcal{O}_k$.

الإثبات: يتم اثبات هذه المبرهنة من خلال النقاط التالية:

•نلاحظ بأنّ $D \equiv 1 \pmod{13}$ بالتالي $\left(\frac{D}{13}\right) = \left(\frac{1}{13}\right) = 1$ بالاعتماد على التعريف ١٢، بالتالي العدد ١٣ ينفصل في k (أي أنّ الإيديال الرئيسي $\langle 13\rangle = 13\mathcal{O}_k$ يتحلل في $\mathcal{O}_k$ للحقل k) بالاعتماد على التمهيدية ٨.

•نلاحظ أيضاً أنّ $\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$ إيديال في $\mathcal{O}_k$ يملك القاعدة $\left\{13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\right\}$ حسب التمهيديّة ٢ (وذلك بعد أخذ $a = 13, b = 1, c = 1$ عندئذٍ $a \mid c$، $b \mid c$ وبما أنّ $13 \mid (1-D)$ و $4 \mid (1-D)$ بالتالي $(4ac \mid (b^2 - Dc^2)$.

•$\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$ إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$.

لكي نثبت أن $\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$ إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$ يجب أن نثبت:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{O}_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right];\ xy \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$$

فإنّ $x \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$ أو $y \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$

بما أنّ $x, y \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$ عندئذٍ

$$x = x_1 + y_1\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right); x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y = x_2 + y_2\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right); x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$$

لدينا $xy \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle$ بالتالي

$$\left(x_1x_2 + y_1y_2\left(\frac{D-1}{4}\right)\right) + (x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right) = 13r_1 + r_2\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right); r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$$

بالتالي

$$\begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2\left(\dfrac{D-1}{4}\right) = 13r_1 \\ x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 = r_2 \end{cases}$$

لدينا

$$x_1x_2 + y_1y_2\left(\frac{D-1}{4}\right) \equiv 0\ (mod\ 13)$$

بما أنّ $D \equiv 1\ (mod\ 13)$ عندئذ

$$x_1x_2 \equiv 0\ (mod\ 13)$$

بالتالي

$$13 \mid x_1x_2$$

عندئذ $13 \mid x_1$ أو $13 \mid x_2$

إذا كان $13 \mid x_1$ بالتالي $x_1 = 13n_1;\ n_1 \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ

$$x = x_1 + y_1\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right) = 13n_1 + y_1\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)$$

بالتالي $x \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle$

أما إذا كان $13 \mid x_2$ بالتالي $x_2 = 13n_2;\ n_2 \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ

$$y = x_2 + y_2\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right) = 13n_2 + y_2\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)$$

بالتالي $y \in \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle$

مما سبق نجد أنّ $\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle$ إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$.

- بنفس الأسلوب السابق نجد أنّ $\langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2} \rangle$ إيديال أولي في $\mathcal{O}_k$ يملك القاعدة $\left\{13, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\right\}$.
- ولنبيّن الآن أنّ

$$\langle 13 \rangle = \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle \langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2} \rangle$$

$$\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle \langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2} \rangle = \langle 13^2, 13\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right), 13\left(\frac{1-\sqrt{D}}{2}\right), \frac{1-D}{4} \rangle = \langle 13 \rangle \mathrm{J}$$

حيث

$$\mathrm{J} = \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}, \frac{1-\sqrt{D}}{2}, \frac{1-D}{4 \times 13} \rangle$$

إيديال في $\mathcal{O}_k$.

$$1 = \frac{1+\sqrt{D}}{2} + \frac{1-\sqrt{D}}{2}$$

بالتالي $1 \in \mathrm{J}$، وهذا يعطينا $\mathrm{J} = \langle 1 \rangle$.

وبالتّالي

$$\langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2} \rangle \langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2} \rangle = \langle 13 \rangle \mathrm{J} = \langle 13 \rangle \langle 1 \rangle = \langle 13 \rangle$$

❖ الآن سنقوم بحساب $\zeta_k(-1, \mathrm{C})$ حيث C صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2} \rangle$.

مبرهنة ٢:

ليكن $m \equiv 10\ (mod\ 13)$ عدد صحيح موجب فردي، وليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ حيث

$D = 169m^{2} + 4m$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن C صفّ إيديال ينتمي إليه
$$\langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\rangle$$

عندئذٍ

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}) = \frac{169m^{3} + 6m^{2} + 20339m + 6}{13 \times 360}.$$

الإثبات: ليكن C صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle 13, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\rangle$ ، وبالتّالي $\mathrm{I} = \langle 13, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\rangle \in \mathrm{C}^{-1}$

وبما أنّ $\left\{r_1 = \frac{1+\sqrt{D}}{2}, r_2 = 13\right\}$ قاعدة للإيديال الصّحيح I حسب التّمهيديّة ٢، عندئذٍ

$\delta(\mathrm{I}) = r_1\,\acute{r}_2 - \acute{r}_1\,r_2 = 13\sqrt{D}$ بالإعتماد على التّمهيدية ٥.

نعلم من التّمهيديّة ١ أنّ $\varepsilon = \frac{169m+2+13\sqrt{D}}{2}$ و $N(\varepsilon) = 1$، وباستخدام التّمهيدية ٥ نجد:

$$a = Tr\left(\frac{r_1\acute{r}_2\varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right) = \frac{r_1\acute{r}_2\varepsilon}{\delta(\mathrm{I})} + \frac{\acute{r}_1 r_2\acute{\varepsilon}}{\left(\delta(\mathrm{I}\,)\right)'}$$
$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right) \times 13 \times \left(\frac{169m+2+13\sqrt{D}}{2}\right)}{13\sqrt{D}} + \frac{\left(\frac{1-\sqrt{D}}{2}\right) \times 13 \times \left(\frac{169m+2-13\sqrt{D}}{2}\right)}{-13\sqrt{D}}$$
$$= \frac{\left(1+\sqrt{D}\right)\left(169m+2+13\sqrt{D}\right) + \left(-1+\sqrt{D}\right)\left(169m+2-13\sqrt{D}\right)}{4\sqrt{D}}$$
$$= \frac{(169m+15)\sqrt{D}}{2\sqrt{D}} = \frac{169m+15}{2}$$

وبنفس الأسلوب نجد أنّ:

$$b = Tr\left(\frac{r_1\acute{r}_1\acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I})}\right) = \frac{D-1}{4}$$
$$c = Tr\left(\frac{r_2\acute{r}_2\varepsilon}{\delta(\mathrm{I}\,)}\right) = 169$$
$$d = Tr\left(\frac{r_1\acute{r}_2\acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I}\,)}\right) = \frac{169m-11}{2}$$
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{169m+15}{2} & \frac{D-1}{4} \\ 169 & \frac{169m-11}{2} \end{pmatrix}$$

نلاحظ بأنّ $\det \mathrm{M} = N(\varepsilon)$.

نلاحظ بأنّ $a \equiv 92(mod\ 169)$ والتعليل كما يلي

$$169m \equiv 0\ (mod\ 169)$$
$$169m + 15 \equiv 15(mod\ 169)$$
$$169m + 15 \equiv -154(mod\ 169)$$
$$\frac{169m+15}{2} \equiv -77(mod\ 169)$$

$$a \equiv 92(mod\ 169)$$

أيضاً من الواضح أنّ $d \equiv 79(mod\ 169)$، بالتالي نجد

$$S^3(a, \mathrm{c}) = S^3(92, 169) = -\frac{32172}{4826809}$$

$$S^3(d, \mathrm{c}) = S^3(79, 169) = \frac{60102}{4826809}$$

$$S^2(a, \mathrm{c}) = S^2(92, 169) = \frac{687457}{173765124}$$

$$S^2(d, \mathrm{c}) = S^2(79, 169) = \frac{687457}{173765124}$$

باستخدام التّمهيديّة ٦ نجد أنّ

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}) = \frac{169m^3 + 6m^2 + 20339m + 6}{13 \times 360}$$

❖ الآن سنقوم بدراسة حدّ أدنى للمجموع التالي

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta} \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right)$$

مبرهنة ٣:

ليكن $m \equiv 10\ (mod\ 13)$ عدد صحيح موجب فردي، وليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

حيث $D = 169m^{\,2} + 4m$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع عندئذٍ

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta} \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right) \geq \frac{28899m^3 + 1026m^2 + 5145m + 234}{13 \times 12}$$

حيث $\sigma(r)$ مجموع القواسم الموجبة لـ r و Δ مميز الحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

الإثبات: بما أنّ $D\ \equiv 1\ (mod\ 4)$ عندئذٍ $\Delta = D$

لدينا $(13m)^{\,2} < \Delta = D < (13m+1)^2$ بالتالي $13m < \sqrt{\Delta} < 13m + 1$

بالتالي

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta} \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right) = \sum_{\substack{1\le t\le 13m \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right)$$

نضع $t = 13m - 2s$ حيث $s = 0,\ 1,\ 2, \dots, \ \frac{13m-1}{2}$

بالتالي

$$\sum_{\substack{1\le t\le 13m \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right) = \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} \sigma\left(\frac{(169m^{\,2} + 4m) - (13m - 2s)^2}{4}\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} \sigma(m(1+13s)-s^2)$$

وبالتالي نجد:

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta} \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right) = \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} \sigma(m(1+13s)-s^2)$$

أولاً:

نناقش مجموع القواسم المبتذلة لِ $(m(1+13s)-s^2)$ أياً كان $0 \le s \le \frac{13m-1}{2}$.

لنضع

$$l_1 = \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} (1+m(1+13s)-s^2)$$

$$l_1 = 1+1+\cdots+1+\left(m+14m+27m+\cdots+\left(\frac{169m-11}{2}\right)m\right) - \left(1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{13m-1}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{13m+1}{2} + \frac{\left(m+\left(\frac{169m-11}{2}\right)m\right)}{2} \times \left(\frac{13m+1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{13m-1}{2}\right)\left(\frac{13m-1}{2}+1\right)\left(2\left(\frac{13m-1}{2}\right)+1\right)}{6}$$

بالتالي:

$$l_1 = \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} (1+m(1+13s)-s^2) = \frac{4394m^3+156m^2+142m+12}{24}$$

ثانياً: لنضع $f(s) = m(1+13s)-s^2$ ولنبين أنّ العددان $\frac{f(s)}{13}$ و ١٣ قاسمان مختلفان لـ $f(s)$ ثم نناقش مجموع القواسم التي حصلنا عليها.

- <u>نلاحظ بأنّ $13 \mid f(s)$ عندما $s \equiv 6 \ (mod\ 13)$ أو $s \equiv 7 \ (mod\ 13)$</u>

$$f(s) = m(1+13s)-s^2 \equiv 10 - s^2 \ (mod\ 13)$$

بالتالي $f(s) \equiv 0 \ (mod\ 13)$ عندما $s \equiv 6 \ (mod\ 13)$ أو $s \equiv 7 \ (mod\ 13)$

بالتالي $13 \mid f(s)$ عندما $s \equiv 6 \ (mod\ 13)$ أو $s \equiv 7 \ (mod\ 13)$

- لاحظنا أنّ $\frac{f(s)}{13}$ و ١٣ قاسمان لـ $f(s)$ ولنبين أنهما مختلفان

$f(s) = m(1+13s)-s^2$ تابع متزايد على المجال $\left[1, \frac{13m-1}{2}\right]$، عندئذٍ

$$\forall s \ge 1$$

$$f(s) \ge f(1) = 14m-1 > (13)^2 \qquad ; \left(\text{أوّل قيمة تصلح لـ } m \text{ هي } m = 23\right)$$

بالتالي $\frac{f(s)}{13} > 13$

$$\sum_{\substack{s=0\\ \& \\ s\equiv 6 \text{ or } 7\ (mod\ 13)}}^{\frac{13m-1}{2}} \left(13+\frac{f(s)}{13}\right) = \sum_{\substack{s=0\\ \& \\ s\equiv 6 \text{ or } 7\ (mod\ 13)}}^{\frac{13m-1}{2}} \left(13+\frac{m(1+13s)-s^2}{13}\right)$$

$$= \left(13+\frac{79m-6^2}{13}\right)+\left(13+\frac{92m-7^2}{13}\right)+\left(13+\frac{248m-19^2}{13}\right)$$
$$+\left(13+\frac{261m-20^2}{13}\right)+\cdots$$
$$+\left(13+\frac{m\left(\frac{169m-323}{2}\right)-\left(\frac{13m-25}{2}\right)^2}{13}\right)$$
$$+\left(13+\frac{m\left(\frac{169m-11}{2}\right)-\left(\frac{13m-1}{2}\right)^2}{13}\right)$$
$$=(13+13+\cdots+13)+\frac{1}{13}\left(79m+248m+\cdots+\left(\frac{169m-11}{2}\right)m\right)$$
$$+\frac{1}{13}\left(92m+261m+\cdots+\left(\frac{169m-323}{2}\right)m\right)$$
$$-\frac{1}{13}\left(6^2+7^2+19^2+20^2\ldots+\left(\frac{13m-25}{2}\right)^2+\left(\frac{13m-1}{2}\right)^2\right)$$
$$=(13+13+\cdots+13)+\frac{1}{13}\left(79m+248m+\cdots+\left(\frac{169m-11}{2}\right)m\right)$$
$$+\frac{1}{13}\left(92m+261m+\cdots+\left(\frac{169m-323}{2}\right)m\right)-\frac{1}{13}(s_1+s_2)$$

علماً أنّ $s_1 = 6^2+19^2+\cdots+\left(\frac{13m-1}{2}\right)^2$ و $s_2 = 7^2+20^2+\cdots+\left(\frac{13m-25}{2}\right)^2$

نلاحظ بأنّ

- $s_1 = 6^2+19^2+\cdots+\left(\frac{13m-1}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\frac{m-1}{2}}(13n+6)^2$

$$= 169\sum_{n=0}^{\frac{m-1}{2}} n^2 + 36\sum_{n=0}^{\frac{m-1}{2}} 1 + 156\sum_{n=0}^{\frac{m-1}{2}} n$$

بالتالي

$$s_1 = 169\times\left(1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right)+36\times\left(\frac{m+1}{2}\right)+156\times\left(1+2+\cdots+\frac{m-1}{2}\right)$$
$$=169\times\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}\right)(m)}{6}+36\times\left(\frac{m+1}{2}\right)+156\times\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2}$$

بالتالي

$$s_1 = \frac{169m^3+468m^2+263m-36}{24}$$

- $s_2 = 7^2+20^2+\cdots+\left(\frac{13m-25}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\frac{m-3}{2}}(13n+7)^2$

$$= 169\sum_{n=0}^{\frac{m-3}{2}} n^2 + \sum_{n=0}^{\frac{m-3}{2}} 49 + 182\sum_{n=0}^{\frac{m-3}{2}} n$$

بالتالي

$$s_2 = 169 \times \left(1^2 + 2^2 + \cdots + \left(\frac{m-3}{2}\right)^2\right) + 49 \times \left(\frac{m-1}{2}\right) + 182 \times \left(1 + 2 + \cdots + \frac{m-3}{2}\right)$$

$$= 169 \times \frac{\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)(m-2)}{6} + 49 \times \left(\frac{m-1}{2}\right) + 182 \times \frac{\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{169m^3 - 468m^2 + 263m + 36}{24}$$

بالتالي

$$s_2 = \frac{169m^3 - 468m^2 + 263m + 36}{24}$$

مما سبق نجد:

$$\sum_{\substack{s=0 \\ \& \\ s\equiv 6 \text{ or } 7 \ (mod\ 13)}}^{11m-1} \left(13 + \frac{f(s)}{13}\right)$$

$$= (13 + 13 + \cdots + 13) + \frac{1}{13}\left(79m + 248m + \cdots + \left(\frac{169m-11}{2}\right)m\right) + \frac{1}{13}\left(92m + 261m + \cdots + \left(\frac{169m-323}{2}\right)m\right) - \frac{1}{13}(s_1 + s_2)$$

$$= 13m + \frac{1}{13}\left(\frac{79m + \left(\frac{169m-11}{2}\right)m}{2}\right) \times \left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{1}{13}\left(\frac{92m + \left(\frac{169m-323}{2}\right)m}{2}\right) \times \left(\frac{m-1}{2}\right) - \frac{1}{13}\left(\frac{169m^3 + 263m}{12}\right) = \frac{676m^3 + 24m^2 + 4388m}{13 \times 24}$$

ثالثاً: من أجل $s = m$ نجد

$$m(1+13s) - s^2 = m(1+13m) - m^2 = 12m^2 + m = m(12m+1)$$

بالتالي m و$(12m+1)$ قاسمان مختلفان لـ $m(1+13s) - s^2$ في حالة $s = m$

ومجموع هاذين القاسمين هما $m + 12m + 1 = 13m + 1$

نستنتج مما سبق أنّ

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta} \\ \& \\ t \text{ is } odd}} \sigma\left(\frac{\Delta - t^2}{4}\right) = \sum_{s=0}^{\frac{13m-1}{2}} \sigma(m(1+13s) - s^2)$$

$$\geq \frac{4394m^3 + 156m^2 + 142m + 12}{24} + \frac{676m^3 + 24m^2 + 4388m}{13 \times 24} + 13m + 1$$

بالتالي

$$\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta}\\ \& \\ t\ is\ odd}} \sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right) \geq \frac{28899m^3+1026m^2+5145m+234}{13\times 12}$$

❖ الآن سنقوم بوضع حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^{\,2}+4m}\right)$.

مبرهنة 4:

ليكن $m\equiv 10(mod\ 13)$ عدد صحيح موجب فردي، وليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ حيث $D=169m^{\,2}+4m$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع عندئذٍ $h(D)\geq 3$.

الإثبات:

$$\sum_{\substack{|t|<\sqrt{\Delta}\\ t^2\equiv\Delta\ (mod\ 4)}} \sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right)=\sum_{\substack{|t|<\sqrt{\Delta}\\ t^2\equiv 1\ (mod\ 4)}} \sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right)=2\sum_{\substack{0<t<\sqrt{\Delta}\\ \& \\ t\text{ is odd}}} \sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right)$$

بالاعتماد على المبرهنة ٣ نجد

$$\sum_{\substack{|t|<\sqrt{\Delta}\\ t^2\equiv\Delta\ (mod\ 4)}} \sigma\left(\frac{\Delta-t^2}{4}\right) \geq \frac{28899m^3+1026m^2+5145m+234}{13\times 6}$$

نضرب الطرفين بالعدد $\frac{1}{60}$ عندئذٍ بالاعتماد على التمهيديّة ٤ نجد

$$\zeta_k(-1)\geq \frac{28899m^3+1026m^2+5145m+234}{13\times 360}$$

لدينا مما سبق أنّ :

$$\begin{aligned}\zeta_k(-1,A)+\zeta_k(-1,\mathrm{C}) &= \frac{2197m^3+78m^2+2327m+78}{360}+\frac{169m^3+6m^2+20339m+6}{13\times 360}\\ &= \frac{28730m^3+1020m^2+50590m+1020}{13\times 360}\end{aligned}$$

نلاحظ بأنّ

$$\zeta_k(-1)\geq \frac{28899m^3+1026m^2+5145m+234}{13\times 360} > \zeta_k(-1,A)+\zeta_k(-1,C)$$

حيث (أوّل قيمة تصلح لـ m هي $m=23$) وبما أنّ

$$\zeta_k(-1)=\sum_{\mathrm{H}\in C_k}\zeta_k(-1,\mathrm{H})$$

من التمهيدية ٣، عندئذٍ نجد أن زمرة الصفوف C_k تملك على الأقل ثلاثة عناصر بالتالي $h(D)\geq 3$

الإستنتاجات والتّوصيات:

توصّلنا في هذه المقالة إلى دراسة حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف الحقل التربيعي الحقيقي من النمط $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{169m^2+4m}\right)$، أمّا بالنّسبة للتّوصيات: فنوصي

- بإعطاء حدّ أدنى لرتبة زمرة صفوف أُسر معيّنة من الحقول التّربيعيّة الحقيقيّة، مثلاً الحقول من النمط $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{(pm)^2+2m}\right)$ حيث p عدد أولي فردي.

▪ تحسين الحدّ الأدنى لرتبة زمرة صفوف أُسر معيّنة من الحقول التّربيعيّة الحقيقيّة.

المراجع: References

[1] Alaca, S., Williams, K. S. (2004). *Introductory Algebraic Number Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

[2] Apostol, T. M. (1950). *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*. Duke Mathematical Journal, 17, 147-157.

[3] Biro', A. (2003).*Yokoi's conjecture.* Acta Arith, 106, 85–104.

[4] Biro', A. (2003*). Chowla's conjectur*e. Acta Arith, 107, 179–194.

[5] Biro', A. and Lapkova, K. (2016*). The class number one problem for the* realquadratic fields $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(an)^2+4a}\right)$. Acta Arith, 172, 117-131.

[6] Bolker, E. D. (1970). *Elementary Number Theory*. An Algebraic Approach, W. A. Bedjamin, Inc. New York.

[7] Byeon, D., Kim, H. K. (1996). *Class number 1 criteria for real quadratic fields of Richaud Degert typ*e. Journal of Number Theory, 57, 328-339.

[8] Byeon, D., Kim, H. K. (1997). *Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud Degert type.* Journal of Number Theory, 62, 257-272.

[9] Chakraborty, K., Hoque, A., Mishra, M. (2021). *On the structure of order 4 class groups of* $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+1})$*: Annales mathématiques du Québec*, 45, 203-212.

[10] Halter-Koch. F. (2013). *Quadratic Irrationals: An introduction to Classical Number Theory, Taylor & Francis Group*, University of Graz Austria.

[11] Hasse, H. (1965). *Über mehrklassige aber eingeschlechtige reell-quadratische Zahlkörper.* Elemente der Mathematik, 20, 49-59.

[12] Issa, A., Sankari, H. (2020). *Some criteria for class numbers to be non-one.* Journal of Mathematics, 2020, 5 pages.

[13] Jihny, R., Darrag, B., Issa, A. (2025). *Lower bound for the class number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{49m^2+4m})$. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,
2025, 4 pages.

[14] Lang, H. (1968*). Über eine Gattung elementar-arithmetischer Klassen invarianten reell-quadratischer Zahlkörper*. Journal für Die Reine und Angewandte Mathematical, 223, 123-175.

[15] Larson, N. (2019). *The Bernoulli Numbers: A Brief Primer*.

[16] Mahapatra, N. K., Pandey, P. P., Ram, M. K. (2023). *Fields of small class number in the family* $\mathbb{Q}(\sqrt{9m^2+4m})$. The Ramanujan journal, 61, 779-798.

[17] Mollin, R. A. (1986*). Lower bounds for class numbers of real quadratic fields.* Proceedings of the American Mathematical Society, 96, 545-550.

[18] Mollin, R. A. (1987). *Lower bounds for class numbers of real quadratic and biquadratic fields.* Proceedings of the American Mathematical Society, 101, 439-444.

[19] Sankari, H., Issa, A. (2020). *Lower bound for the class number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+4})$. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2020, 4 pages.

[20] Siegel, C. L. (1969). *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, in Nachr Akad Wiss Göttingen*, Math-Phys. Klasse, 10, 87-102.

[21] Yokoi, H. (1968*). On real quadratic fields containing units with norm -1*. Nagoya Mathemmatical Journal, 33, 139-152.

[22] Yokoi, H. (1970). *On the fundamental unit of real quadratic fields with norm 1.* Journal of Number Theory, 2, 106-115.

[23] Zagier, D. B. (1976*). On the values at negative integers of the zeta function of a real quadratic field*. Enseign. Math,19, 55-95.