مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٣) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (3) 2025

دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر والمحايد من خلال المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية

د. محمد معلّا *

(تاريخ الإيداع ٣/٧/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر ١٧/٩/ ٢٠٢٥)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر والمحايد، وذلك من خلال إيجاد علاقة بين تذبذب المعادلات التأخيرية والمعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية، وبالتالي تمديد الكثير من معايير التذبذب من المعادلة المعممة إلى المعادلة ذات الحد المتأخر وكذلك ذات الحد المحايد، يساعدنا تحويل ريكاتي بشكل أساسي في الوصول إلى نتائج جديدة.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية نصف خطية معممة–حد متأخر– حد محايد– التذبذب– تحويل ريكاتي.

* دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٩) العدد (٣) ٢٠٢٥

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (9) No. (3) 2025

Study on Oscillation for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with delay and neutral through Generalized Half Linear Second Order Differential Equations

Dr. Mohamad Moalla *

(Received 3/7/2025.Accepted 17/9/2025)

□ABSTRACT □

The aim of this paper is to study the oscillation of the generalized half-linear second order differential equation with delay and neutral, this is achieved by establishing a connection between the oscillation of delay differential equation and the generalized half-linear second order differential equation. Consequently many oscillation criteria can be extended from generalized equations to equations with delay terms as well as those with neutral terms, the riccati transformation plays a fundamental role in deriving new results.

Keywords: generalized Half Linear – oscillation –delay –neutral –riccati transformation.

* Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University, Tartous, Syria.

مقدمة

إن أغلب التغيرات في عالمنا المحيط تعتبر نماذج لمعادلات تفاضلية غير خطية، معظم هذه التغيرات يخضع لتفاوت زمني من حيث وقوع التغيير و رد الفعل الناتج عنه، الأمر الذي دفعنا لدراسة المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بعد إضافة حد التأخير، وحد محايد لا يؤثر على خواص فضاء الحلول، حيث تأخذ المعادلات التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية الشكل الآتي [3]:

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $f(x,y) = |x|^{p-1}|y|^{2-p}sgn(x); p > 1$، ويتمتع هذا التابع بالخواص الآتية:

1. التابع $f(x,y)$ مستمر على المنطقة $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ حيث أن $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$،
2. التابع $f(x,y)$ متجانس، أي يحقق العلاقة $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$، وذلك أياً كانت λ من $\mathbb{R}$،
3. يحقق التابع $f(x,y)$ أن $xf(x,y) > 0$، وذلك من أجل $xy \neq 0$،
4. نظامية التابع $f(x,y)$ تضمن وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1) ، وبالتالي من أجل أي نقطة (x_1, x_2) من Ω، فإنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة يحقق أن $x(t_0) = x_1 , x'(t_0) = x_2$ ،
5. إذا كان التابع $F(t)$ معرفاً بالعلاقة $F(t) := tf(t,1)$ ، عندئذٍ يتحقق أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+F(t)} < +\infty$ و $\lim_{|t|\to+\infty} F(t) = +\infty$ ،
6. يجعل التابع $f(x,y)$ التابع H محدباً تماماً (سيتم تعريفه لاحقاً ضمن تحويل ريكاتي).

إن أهمية الدراسة هنا تنبع من الاهتمام بمعرفة سلوك الحلول بعيداً عن محاولة إيجادها لصعوبة التوصل إليها، كما أن الطرق العددية تقدم وصفاً للحلول على مجالات محدودة، حيث سيتركز البحث حول تذبذب حلول المعادلة المدروسة.

يقصد بتذبذب (Oscillation) المعادلة (1) هو أن يملك كل حل من حلولها عدداً لانهائياً من الأصفار على مجال ما، أما عدم التذبذب (Non-oscillation) هو أن يوجد حل ما للمعادلة (1) بحيث يملك عدداً منتهياً من الأصفار على ذلك المجال.

إن العديد من المعادلات التفاضلية نصف الخطية تحقق مبرهنة شتورميان [7]، والتي تنص على أنه بين كل صفرين لحل ما $x(t)$ للمعادلة المدروسة، فإن كل حلول تلك المعادلة ستملك صفراً بين صفري $x(t)$ ، وذلك يعني أننا سنضمن تذبذب تلك المعادلات التي تحقق مبرهنة شتورميان بتذبذب حل واحد على الأقل.

درس الباحثان Došlý, O و Řezníčková, J الحلول الأساسية للمعادلة (1) في [3]، بعد ذلك وضع الباحثان Bognár و O. Dosly في [4] معايير هامة تضمن تذبذب المعادلة (1)،

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر بالشكل الآتي:

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (2)$$

حيث أن $c(t)$ و$r(t)$ تابعان موجبان تماماً أياً كانت t من$\mathbb{R}$، والتابع $\tau(t)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1) $\tau(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) $\tau(t) \leq t$

3) $lim_{t\to\infty}\tau(t) = \infty$

درس الباحثان S. Fišnarová و R. Marík في [1] تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر ثم ذات الحد المحايد، ووضع الباحثان معايير لتذبذب المعادلات الكلاسيكية ذات الحد المتأخر ثم ذات الحد المحايد من خلال تذبذب المعادلات الكلاسيكية، ثم عمل الباحثان Marík وFišnarová في [2] على إيجاد معيار لتذبذب المعادلات ذات الحد المتأخر، وذلك من خلال تذبذب المعادلات الخطية من المرتبة الثانية.

درس معلا و أخرون في [9] المعادلة (2) مع حد محايد $z(t) = x(t) + a(t)x(\theta(t))$، ووضعوا معايير لتذبذب المعادلة، أما في هذا البحث سندرس تذبذب المعادلة الآتية:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0 \quad (3)$$

حيث إن$f(x, y) = |x|^{p-1}|y|^{2-p}sgn(x); p > 1$، و$r(t) > 0$، و$c(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t \in \mathbb{R}$، والتابع$\tau(t)$ يتمتع بالخواص المذكورة سابقاً، أما $z(t)$ فيعطى بالعلاقة $z(t) = \sqrt[\gamma]{x^\gamma(t) + a(t)x^\gamma(\theta(t))}$ حيث γ عدد فردي كيفي (يفيد تعريف$z(t)$ بتعميم دراسة تذبذب المعادلة (3))، و$0 \leq a(t) < 1$، والتابع $\theta(t)$ يحقق العلاقتين $\theta(t) \leq t$ و$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، نلاحظ أنه من أجل حل ما $x(t)$ للمعادلة (3)، فإن $\lambda x(t)$ أيضاً حل حيث $\lambda \in \mathbb{R}$، وبالتالي تتحقق نصف شروط الفضاء الخطي.

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (3)، وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية ذات حد محايد. إن لهذه الدراسة دور هام في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر، ولذلك فإن هذا البحث يعد على درجة كبيرة من الأهمية للباحثين في المجالات العلمية النظرية والتطبيقية. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، من حيث التذبذب أو عدم التذبذب.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال نظرية المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج والمناقشة:

ندرس في هذا القسم تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة (3) التي تحوي على حد متأخر $\tau(t)$ وآخر محايد$z(t) = \sqrt[\gamma]{x^\gamma(t) + a(t)x^\gamma(\theta(t))}$ حيث γ عدد فردي، عرض الباحث Bognar في [4] موضوعة تعالج تذبذب المعادلة (1)، وهي كالآتي:

موضوعة 1:[4]

لدينا التكافؤ الآتي:

1) المعادلة (1) غير متذبذبة على $[T,+\infty[$.

2) يوجد $v(t)$ حل معرف على $[T,+\infty[$ يحقق أن $v'(t)+c(t)+\frac{H(v)}{r(t)}=0$.

3) يوجد تابع $v(t)$ معرف على $[T,+\infty[$ يحقق أن $v'(t)+c(t)+\frac{H(v)}{r(t)}\le 0$.

نوضح الآن تحويل ريكاتي للمعادلة (3) الذي سيعمل على تحويلها إلى معادلة لتفاضلية من المرتبة الأولى من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 1:[4]

يعطى تحويل ريكاتي للمعادلة (3) بالمعادلة الآتية :

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0 \quad ; \; p>1 \qquad (4)$$

برهان:

بفرض $x(t)\neq 0$ من أجل كل $t\ge T$ حل للمعادلة (3) ، لنضع $u(t)=\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}$ و $v(t)=g(u(t))$، بالتالي باشتقاق التابع $v(t)$ نحصل على:

$$v'(t)=g'(u)u'(t)=g'(u)\left(\frac{\left(r(t)z'(t)\right)'}{z(t)}-\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^2}{(z(t))^2}\right)$$

بالاستفادة من المعادلة (3) لدينا $v'(t)=-g'(u)\,c(t)\frac{f\left(x(\tau(t)),r(t)z'(t)\right)}{z}-g'(u)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^2}{z^2}$، ومنه:

$$v'(t)=-g'(u)c(t)u(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1}f\left(\frac{1}{u},1\right)-g'(u)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^2}{z^2}$$

نختار التابع g بحيث يحقق أن $g'(u)u(t)f\left(\frac{1}{u},1\right)=1$، فنحصل على المعادلة الآتية:

$$v'(t)+c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1}+\frac{H(v)}{r(t)}=0$$

وعندئذٍ يصبح $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معطى بالعلاقة الآتية:

$$g(u)=\begin{cases}\int_{1/u}^{+\infty}\frac{ds}{F(s)} & if\quad u>0\\ -\int_{-\infty}^{1/u}\frac{ds}{F(s)} & if\quad u<0\\ 0 & if\quad u=0\end{cases}$$

ويعطى $F(t)$ بالعلاقة $F(t)=tf(t,1)$، ويعطى التابع H بالعلاقة $H(v)=(g^{-1}(v))^2g'(g^{-1}(v))$.

إن التوابع F,H,g تتمتع بخواص مهمة مذكورة في[4].

إن أهمية الفرضية $u(t)=\frac{r(t)z'(t)}{z(t)}$ و $v(t)=g(u(t))$ تكمن في فكرة أن عدم تذبذب المعادلة (3)، يعني أنه يوجد لها حل $x(t)$ بحيث أن خطه البياني لا يقطع المحور الأفقي للمستوي الإحداثي من أجل $t\ge T$، وبالتالي يكون $v(t)$ حل المعادلة (4) معرف عندما $t\ge T$

تمهيدية 2:

ليكن$x(t) > 0$ حل للمعادلة(3) أياً كانت$t > T$، من أجل$\int^{+\infty} \frac{1}{r(t)} dt = +\infty$، فإن$z(t)$ المحدد بالعلاقة$z(t) = \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)x^{\gamma}(\theta(t))}$ يحقق $z(t) > 0$ و$z'(t) > 0$، إضافة لذلك إذا كان $r'(t) \geq 0$، فإن $z''(t) < 0$ وذلك أياً كانت $t > T$.

برهان:

بما أن$x(t) > 0$ أياً كانت$t > T$، فإنه يوجد $T_1 > T$ بحيث يكون $x(\theta(t)) > 0$ وذلك أياً كانت$t > T_1$، وبالتالي فإن التابع$z(t)$ يحقق أن $z(t) = \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)x^{\gamma}(\theta(t))} > 0$ وذلك أياً كانت$t > T_1 > T$، حيث $a(t) \geq 0$.

لنأخذ الآن المعادلة(3)، مع $x(t) > 0$ من أجل $t > T$ حل للمعادلة (3)، ومنه فإننا نجد الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)f\left(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\right) < 0$$

أي أن التابع $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً على مجال $]T, +\infty[$.

الآن بنقض الفرض، إذا افترضنا $z'(t) \leq 0$ من أجل $t > T$، وبسبب تناقص $r(t)z'(t)$ نجد أن $z'(t) < \frac{-m}{r(t)} < 0$ من أجل$t > T_1 > T$، حيث $r(t) > 0$ من تعريف المعادلة(3)، و m عدد حقيقي موجب تماماً، و بالمكاملة على المجال $]T_1, +\infty[$ نجد أن:

$$z(t) < z(T_1) - m\int_{T_1}^{t} \frac{1}{r(t)} dt$$

وبجعل t تسعى إلى$+\infty$، نجد أن$z(t) < 0$ وهذا تناقض، ومنه فإن $z'(t) > 0$ أياً كانت $t > T$.

لنحسب الآن $z''(t)$، بما أن$r(t)z'(t)$ تابع متناقص تماماً، أي أن $[r(t)z'(t)]' < 0$، ومن هذه المتراجحة نجد أن $0 \leq \frac{-r'(t)z'(t)}{r(t)} > z''(t)$، وبالتالي فإن $z''(t) < 0$ من أجل كل $t > T$.

تمهيدية 3:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة (3) يحقق $x(t) > 0$ من أجل $t > T$، وليكن $\int^{+\infty} \frac{1}{r(t)} dt = +\infty$، عندئذٍ فإنه من أجل$t > T$ لدينا الآتي:

$$(5)\ x^{\gamma}(\tau(t)) \geq \left[1 - a(\tau(t))\right] z^{\gamma}(\tau(t))$$

برهان:

لنأخذ التابع $x(t)$ الذي يحقق$x(t) > 0$ من أجل $t > T$، فإنه بحسب التمهيدية 2 نجد أن $z(t) > 0$ و$z'(t) > 0$. لنأخذ الآن التابع$z(t)$ المعرف بالعلاقة$z(t) = \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)x^{\gamma}(\theta(t))}$، ومنه نجد أن$z(\theta(t))$ يحقق أن$z(\theta(t)) = \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(\theta(t)) + a(\theta(t))x^{\gamma}(\theta(\theta(t)))}$، وبما أن $a(\theta(t)) > 0$ و$x\left(\theta(\theta(t))\right) > 0$ من أجل $\theta(\theta(t)) > T$، فإننا نجد $z(\theta(t)) \geq x(\theta(t))$، ومنه نجد أن $z(t) = \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)x^{\gamma}(\theta(t))} \leq \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)z^{\gamma}(\theta(t))}$، وبما أن $z'(t) > 0$، فإن $z(\theta(t)) \leq z(t)$، ومنه نحصل على المتراجحة$z(t) \leq \sqrt[\gamma]{x^{\gamma}(t) + a(t)z^{\gamma}(t)}$، وبالتالي يكون لدينا $x^{\gamma}(t) \geq (1 - a(t))z^{\gamma}(t)$، ومنه $x^{\gamma}(\tau(t)) \geq \left[1 - a(\tau(t))\right] z^{\gamma}(\tau(t))$.

تمهيدية 4:

من أجل $x(t) \in C^2]T,+\infty[$ حل موجب تماماً للمعادلة (3) ، و الشروط الآتية محققة $r'(t) > 0$ من أجل $t \in]T,+\infty[$ ، $\int^{+\infty} \frac{1}{r(t)} dt = +\infty$ ، $\int_T^\infty c(t)\left[1-a\left(\tau(t)\right)\right]^{p-1}(\tau(t))^{\gamma p-\gamma} dt = \infty$، عندئذ تتحقق المتراجحة $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} \geq \frac{\tau(t)}{t}$ حيث $z(t) = \sqrt[\gamma]{x^\gamma(t) + a(t)x^\gamma(\theta(t))} > 0$.

برهان:

ليكن $x(t)$ حلاً موجباً تماماً للمعادلة (3) ، حسب التمهيدية 2.2 نجد أن $z(t)$ يحقق $z'(t) > 0$ و $z(t) > 0$ و $z''(t) < 0$ من أجل $t > T$ ، سنبرهن الآن أن $z'(t)t - z(t) \leq 0$ من أجل $t > T$ بطريقة نقض الفرض.

لنفرض أن $z'(t)t - z(t) > 0$ ، أي أن $\left(\frac{z(t)}{t}\right)' > 0$ ، ومنه فإن $\frac{z(t)}{t}$ متزايد تماماً، وبالتالي فهو يحقق أن $z(t) > kt$ حيث أن $k = \frac{z(T)}{T}$ وذلك من أجل $t > T$، ومنه يتحقق الآتي :

$$r(t)z'(t) = r(T)z'(T) - \int_T^t c(s) \frac{\left(x(\tau(s))\right)^{p-1}}{\left(r(s)z'(s)\right)^{p-2}} ds \leq$$

$$r(T)z'(T) - \int_T^t c(s) \frac{\left(\left[1-a(\tau(s))\right] z^\gamma(\tau(s))\right)^{p-1}}{\left(r(s)z'(s)\right)^{p-2}} ds \leq$$

$$r(T)z'(T) - \frac{1}{\left(r(T)z'(T)\right)^{p-2}} \int_T^t c(s) \left(\left[1-a\left(\tau(s)\right)\right] \left(k\left(\tau(s)\right)^\gamma\right)^{p-1} ds$$

وعندما تأخذ t قيم كبيرة فإن $r(t)z'(t) < 0$ ، وهذا تناقض، ومنه فإن $\left(\frac{z(t)}{t}\right)' \leq 0$ ، وبالتالي ينتج لدينا أن $\frac{z(\tau(t))}{z(t)} \geq \frac{\tau(t)}{t}$.

مبرهنة 1:

لتكن لدينا $\int^{+\infty} \frac{1}{r(t)} dt = +\infty$ ، $\int_T^\infty c(t)\left[1-a\left(\tau(t)\right)\right]^{p-1}(\tau(t))^{\gamma p-\gamma} dt = \infty$ ، $r'(t) > 0$ من أجل $t \in]T,+\infty[$ شروط محققة في المعادلة الآتية :

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)\left(\sqrt[\gamma]{1-a\left(\tau(t)\right)}\right)^{p-1}\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1} f\left(x(t), r(t)x'(t)\right) = 0 \qquad (6)$$

عندئذٍ إذا كانت المعادلة (6) متذبذبة، فإن المعادلة (3) متذبذبة.

برهان:

سنستخدم طريقة نقض الفرض. لنفرض أن المعادلة (6) متذبذبة، وأن المعادلة (3) غير متذبذبة، عندئذٍ يوجد $x(t)$ حل للمعادلة (3) بحيث يحقق أن $x(t) > 0$ من أجل $t > T$. لنأخذ تحويل ريكاتي للمعادلة (3) حيث أن $u(t) = \frac{r(t)z'(t)}{z(t)}$ وأن $v(t) = g(u(t))$، فحسب التمهيدية 1 لدينا:

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0 \qquad (7)$$

أما تحويل ريكاتي للمعادلة (6) فهو يعطى بالعلاقة الآتية:[2]

$$w'(t) + c(t)\left(\sqrt[\gamma]{1-a\left(\tau(t)\right)}\right)^{p-1}\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(w)}{r(t)} = 0 \qquad (8)$$

وحسب التمهيدية 3 و التمهيدية 4، ولدى تعويض $v(t)$ حل المعادلة (7) في المعادلة (8) ينتج لدينا:

$$v'(t) + c(t)\left(\sqrt[\gamma]{1 - a(\tau(t))}\right)^{p-1}\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \le$$

$$v'(t) + c(t)\left(\sqrt[\gamma]{1 - a(\tau(t))}\right)^{p-1}\left(\frac{z(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \le$$

$$v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)}$$

وحسب التمهيدية 1 يكون $v'(t) + c(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{z(t)}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} = 0$ وبالتالي ينتج لدينا الآتي:

$$v'(t) + c(t)\left(1 - a(\tau(t))\right)^{p-1}\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{p-1} + \frac{H(v)}{r(t)} \le 0$$

وبالتالي المعادلة (6) غير متذبذبة حسب الموضوعة 1، وهذا تناقض.

الاستنتاجات والتوصيات

درسنا في هذه الأوراق تذبذب المعادلة (3) وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية، حيث أنها تحوي حداً متأخراً وآخر محايداً، حيث تمت مقارنتها بالمعادلة (6) وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية، نوصي بدراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد الأعظمي.

المراجع

[1] S. Fišnarová, R. Marík, *Oscillation of half-linear differential equations with delay*, Abstr. Appl. Anal. Art. ID 583147, 6 pp,2013.

[2] Fišnarová, S; Marík, R. *Modified Riccati technique for half-linear differential equations with delay*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No 64, pp 1-14, 2014.

[3]Došlý, O; Řezníčková, J. *Conjugacy and principal solution of generalized half-linear second order differential equations*. Qual, no 5, pp 1-13,2012.

[4] Došlý, O; Bognár, G. *Conditional oscillation and principal solution of generalized half-linear differential equation*. submitted.Debrecen, pp. 459-451, 2013.

[5] Došlý, O. *half-linear differential equation*. 2005.

[6] Elbert, A; Kusano, T; Tanigawa, T. *an oscillatory half-linear differential equation*. Vol 33, No 4, pp 355-361, 1997.

[7] Elbert, A. *On the half-linear second order differential equations*. Acta math, Hung, pp 487–508, 1987.

[8] Elbert, A. *Generalized Riccati equation for half-linear second order differential equations*. J´anos Bolyai, pp, 227–249, 1984.

[9] Injrou, S; Karoum, R; Moalla, M. *Oscillation criteria for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with neutral,* Tishreen university journal, vol 38, no (5), 2019.