مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (١) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (1) 2026

استخدام طريقة عددية مطورة لحل المعادلات التفاضلية العشوائية ذات البعد الواحد

أ.م.د عائدة صائمة *

سارة إبراهيم المحمد **

(تاريخ الإيداع ١٦/١٢/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر ٤/٣/ ٢٠٢٦)

□ ملخّص □

نقدّم في هذا العمل طريقةً عدديةً مطورة لحل المعادلات التفاضلية العشوائية ذات البُعد الواحد، تعتمد على تطوير طريقة ميلستين من خلال إدخال معامل تصحيح تكيُّفي $\theta(h)$ يعتمد على خطوة الزمن، وتهدف الطريقة إلى تحقيق توازنٍ بين الدقة العددية والاستقرار، خاصة عند استخدام خطوات زمنية متوسطة إلى كبيرة.

قمنا بدراسة الخصائص العددية للطريقة المطورة، مثل الاستقرار والاتساق والتقارب القوي والتقارب الضعيف. وقد تم اختبار فعالية الطريقة المطورة بتطبيقها على مسائل اختبار خطية وغير خطية، وأُجريت مقارنة عددية بين الطريقة المطورة وطرائق أويلر– ماریاما وميلستين و رانج–كوتا. نُفّذت التجارب باستخدام لغة البرمجة Mathematica، وأظهرت النتائج أن الطريقة المطورة تفوّقت على طرائق أويلر–ماریاما وميلستين و رانج–كوتا من حيث الدقة والاستقرار.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية، عملية وينر، الاستقرار العددي، التقارب العددي، طريقة ميلستين.

*: أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية .

**: طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (١) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (1) 2026

Application Of A Developed Numerical Method for Solving One-Dimensional Stochastic Differential Equations

Dr. Aida Sayma*

Sara I. Al-Mohammd **

(Received 16/12/2025.Accepted 4/3/2026)

□ABSTRACT □

In this work, we present a developed numerical method for solving one-dimensional stochastic differential equations. The method is based on a modification of the Milstein scheme through the introduction of an adaptive correction coefficient $\theta(h)$ that depends on the time step, aiming to achieve a balance between numerical accuracy and stability, particularly when using medium to large time steps.

We studied the numerical properties of the developed method, including stability, consistency, strong convergence, and weak convergence. The effectiveness of the developed method was tested on both linear and nonlinear benchmark problems, and a numerical comparison was conducted with the Euler–Maruyama, Milstein, and Runge–Kutta methods.The experiments were implemented using Mathematica programming language, and the results demonstrated that the developed method outperformed the Euler–Maruyama, Milstein, and Runge–Kutta methods in terms of accuracy and stability.

Keywords: stochastic differential equations, Wiener process, numerical stability, numerical convergence, Milstein method.

*: Assistante Prof– Department of Mathematics – Faculty of Science – University of Tartous- Tartous – Syria.

**: Postgraduate student (MA) - Department of Mathematics - Faculty of Science - University of Tartous - Tartous – Syria.

المقدمة :

تُعدّ المعادلات التفاضلية العشوائية من أهم الأدوات الرياضية الحديثة في نمذجة الأنظمة الديناميكية التي تتأثر بعوامل غير حتمية أو بضوضاء عشوائية. وتُستخدم هذه المعادلات على نطاق واسع في العديد من المجالات التطبيقية، فمثلاً في المجال الاقتصادي في نمذجة تطور أسعار الأسهم وأسواق الأوراق المالية، وعلم الأحياء لوصف انتشار الأوبئة، والفيزياء في نمذجة الحركة البراونية، والهندسة في تحليل الأنظمة العشوائية، فضلاً عن تطبيقاتها في دراسة الظواهر المناخية وعلم الأعصاب.

ونظراً لأن معظم المعادلات التفاضلية العشوائية لا تمتلك حلولاً تحليلية، فإن الحلول العددية تُعدّ الخيار الأساسي للتعامل مع هذه النماذج، إذ تُنتج الطرق العددية تقريبات فعّالة ودقيقة لسلوك الحلول. وتتعدد الطرق العددية المستخدمة لحل هذه المعادلات، ويتم اختيار الأنسب منها وفقاً لطبيعة النموذج المدروس، والدقة المطلوبة، وسرعة الحساب. ولهذا السبب، يُعدّ تحليل هذه الطرق وتطويرها من الموضوعات البحثية النشطة في الرياضيات التطبيقية والعلوم الحديثة.

وقد شهد هذا المجال تطوراً تاريخياً مهماً، ففي عام 1955 ، قدّم Gisiro Maruyama دراسةً منهجية لتقارب التقريبات العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية(Maruyama,1955)، وفي عام 1974 قدمّ Grigori N. Milsteinأول طريقة عددية دقيقة من مرتبة أعلى[14]، فاتحاً الباب أمام تطوير طرائق عددية أكثر دقة وتعقيداً.

وخلال العقدين الأخيرين، تعمّق البحث في هذه الطرق. ففي عام 2001 ، قدّم Higham دراسةً شاملة للتقارب الضعيف والقوي لطريقتي أويلر–ماریاما وميلستين [8]. ثم ناقش Wang في 2008 طرائق Runge–Kutta وحصل على حلول من المرتبة الأولى [16]. وفي 2011، استخدم Amini و آخرون طريقة أويلر–ماریاما لتقديم حلول محسّنة [1]. ثم في 2019، نشر Särkkä وSolin كتاباً تطبيقياً قدّما فيه دراسة شاملة لمحاكاة المعادلات التفاضلية العشوائية وأساليبها العددية [15]. وفي عام 2021، درست Anjali Maria Dhanpal طريقة ميلستين للمعادلات ذات البُعد الواحد، وحلّلت تقاربها القوي والضعيف [5]. وفي السنوات الأخيرة، تزايد التركيز على تطوير هذه الطريقة وتحسينها. ففي 2022، قدّم Biswas وآخرون طريقة محسّنة لميلستين للمعادلات ذات ضجيج مشترك ومعاملات انجراف غير قابلة للتفاضل [3]. وأخيراً، في 2025، درس Gerencsér ، Lampl وLing أداء طريقة ميلستين في حالة معاملات انجراف ذات انتظام ضعيف ، وأظهروا إمكانية تحقيق تقارب عددي حتى في ظل شروط انتظام ضعيفة [7].

أهمية البحث :

تُعد طريقة ميلستين من الطرق الكلاسيكية الفعّالة في حل المعادلات التفاضلية العشوائية، حيث تحقق توازناً بين الدقة العددية والتكلفة الحسابية وسرعة التقارب، مما يجعلها مفضّلة من الناحية النظرية في العديد من التطبيقات [10]. ومع ذلك، قد يتراجع الأداء العددي لطريقة ميلستين عند استخدام خطوات زمنية كبيرة نسبياً، مما قد يؤدي إلى انخفاض في الدقة أو فقدان الاستقرار العددي. ومن هنا تبرز أهمية هذا البحث، الذي يهدف إلى اقتراح تعديل على الطريقة الكلاسيكية لتحقيق توازن أفضل بين الدقة العددية والاستقرار ، دون إضافة أي تعقيد رياضي أو حسابي ملحوظ. حيث يعتمد هذا التعديل على إدخال معامل تكيّفي يعتمد على حجم الخطوة الزمنية، مما يسمح للطريقة بالتكيف مع خصائص النموذج المُعالَج، ويعزز كفاءتها وفاعليتها في مختلف البيئات العددية. ويُعدّ هذا التطوير إسهاماً مهماً في تحسين أداء الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية، مع الحفاظ على بساطة الخوارزمية وفعالية التطبيق.

طرائق البحث ومواده :

يعتمد هذا البحث على دمج الأدوات النظرية والتطبيقية في دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية، حيث يستند إطارها النظري إلى مفاهيم أساسية من التحليل العددي والرياضي، مع التركيز بشكل خاص على نظرية المعادلات التفاضلية العشوائية. و يُوظِّف البحث أيضاً مفاهيم أساسية من الإحصاء الرياضي، ولا سيما تلك المتعلقة بعملية وينر، بهدف نمذجة الظواهر غير الحتمية بدقة. ونظراً لصعوبة الحصول على حلول تحليلية لهذه الفئة من المعادلات في معظم التطبيقات العملية، تم تطوير خوارزميات عددية متخصصة وتنفيذها باستخدام لغات البرمجة العلمية المتقدمة، مما يسمح بحساب الحلول عددياً وتحليل خصائصها. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة طرطوس في الفترة الواقعة بين نيسان 2025 و كانون أول عام 2025 .

مفاهيم وتعريفات أساسية:

نبدأ بعرض بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية العشوائية:

تعريف (1): المعادلة التفاضلية العشوائية (stochastic differential equation) [4]: هي معادلة تفاضلية تتضمن عمليات عشوائية ،حيث يكون فيها واحد أو أكثر من المتحولات عشوائي وتعطى المعادلة التفاضلية العشوائية من البعد الأول وفق صيغة إيتو بالشكل:

$$dX(t) = f(X(\mathrm{t}), \mathrm{t})dt + g\,(X(\mathrm{t}),\mathrm{t})\mathrm{d}W(\mathrm{t}) \qquad (1)$$

حيث $X(\mathrm{t}_0) = X_0$ و $\mathrm{T} > 0$ و $\mathrm{t} \in [t_0, \mathrm{T}]$

تُسمّى الدالة fمعامل الانجراف(Drift Coefficient) و هي تمثّل معدل النمو قصير الأمد. أما الدالة g فهي معامل الانتشار(Diffusion Coefficient) وهي تمثل مقدار التغيّر العشوائي قصير الأمد. أما $W(\mathrm{t})$ فتمثل عملية وينر (Wiener Process) ، بينما$X(t):[0,T]\rightarrow \mathbb{R}$ فهي عملية عشوائية تمثّل حل المعادلة التفاضلية العشوائية (1) .

تعريف (2): العملية العشوائية $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ [11] : هي مجموعة من المتغيرات العشوائية على فضاء احتمالي معطى(Ω,F,P) والمرتبطة مع الزمن t وعندئذٍ :

•لأجل كل $t \geq 0$ تكون الدالة $W \rightarrow X(t; W)$ قابلة للقياس ومعرفة على الفضاء الاحتمالي (Ω,F,P) .

•لأجل كل $W \in \Omega$ تسمى الدالة $t\rightarrow X(t; W)$ مسار العينة أو مسار العملية.

تعريف (3) : تعرّف عملية وينرWiener Process [8] القياسية في المجال [0,T] بأنها متغير عشوائي$W(\mathrm{t})$

مستمر مع الزمن، من أجل كل [0 ,T] $t\in$ ، ويحقق الخصائص التالية:

خاصة (1) : من أجل كل t يكون توزيع المتغير العشوائي$W(\mathrm{t})$ توزيع طبيعي بمتوسط mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي t.

خاصة (2) : إن $W(0)$=0 باحتمال يساوي الواحد.

خاصة(3): من أجل كل $0 \leq \mathrm{t}_1 < t_2 < \mathrm{T}$ ، فإن الفرق $W(t_2) - W(\mathrm{t}_1)$ يكون متغيراً عشوائياً موزعاً طبيعياً

بمتوسط صفر وتباين $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ أن نكتب $W(\mathrm{t}_2) - W(\mathrm{t}_1) \sim \sqrt{t_2 - \mathrm{t}_1}\mathrm{N}(0,1)$ حيث $N(0,1)$يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

خاصة (4): من أجل كل $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقين $W(t_2) - W(\mathrm{t}_1)$ و $W(t_4) - W(\mathrm{t}_3)$ يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين.

خاصة (5) : يمكن تمثيل عملية وينر $W(t)$ بمسارات مستمرة.

تعريف (4) : الضجة البيضاء وتكامل إيتو (White noise and Itô integral) [6]: يدعى التكامل من الشكل$\int_0^t g\big(s,X(s)\big)dW(s)$ بتكامل إيتو ويمكن إيجاد هذا التكامل بأخذ التجزئة المنتظمة $c = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d$ للمجال [c,d] وهو مجال حل الدالة التي نريد إيجاد تكاملها وفق صيغة إيتو ويعطى تكامل ريمان كنهاية من الشكل : $\int_c^d f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^n f(\overline{t_i}) h_i$

$$\mathrm{t}_{i-1} \le \overline{t_i} \le t_i \quad \text{و} \quad h_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

وبشكل مشابه فإن تكامل إيتو هو النهاية: $I = \int_c^d f(t)dW(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta W_i$

حيث $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ هي خطوة عملية وينر للتكامل ، والخلاف الأساسي هو أن النقطة $\overline{t_i}$ في تكامل ريمان يمكن اختيارها كأي نقطة في المجال (t_{i-1},t_i) بينما في تكامل إيتو يكون المطلوب t_{i-1} نقطة الطرف الأيسر للمجال. و بما أن f و$W(\mathrm{t})$عمليتان عشوائيتان فلا توجد قابلية تقليدية للاشتقاق و يعبّر عن تكامل إيتو بالشكل التفاضلي كالآتي: $dI = f(t)\, dW(t)$

يسمى التفاضل $\mathrm{d}W(\mathrm{t})$ لعملية وينر $W(t)$ بالضجة البيضاء White Noise.

تعريف (5): الخطأ الموضعي Local Error [10]: الخطأ الموضعي هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$\delta_n = |X(t_{n+1}) - x(t_{n+1})| \quad ; n = 1,2,\dots,N \ , \ X(t_n) = x(t_n)$$ حيث

يقيس الفرق بين الحل العددي والحل الدقيق (التحليلي) في مجال زمني جزئي طوله خطوة واحدة من المجال الكلي .

تعريف (6): الخطأ الكلي Global Error [17] : الخطأ الكلي هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$e_n = |X(t_n) - x_n| \quad ; n = 1,2,\dots,N$$

يقيس الفرق المتراكم بين الحل العددي التقريبي والحل الدقيق (التحليلي) على كامل نطاق الحل .

1- طرائق عددية أساسية :

قدمت محاكاة عددية لحل مسألة الم عادلات التفاضلية العشوائية (1) باستخدام تجزئة منتظمة لمجال الحل $[0, T]$ كالآتي:$\Delta: \equiv \{0 = t_0 < t_1 < \dots t_n < t_{n+1} < \dots t_N = T\}$

حيث $\Delta t = h$ و $\mathrm{n} = 0,1,\dots,\mathrm{N}$ و $t_n = nh$ و $h = \frac{T}{N}$ طول الخطوة.

طريقة أويلر–ماریاما Euler-Maruyama [4] :

نوضح الطريقة بتطبيقها على المعادلة التفاضلية العشوائية (1) وبفرض أن الطريقة العددية تنتج متتالية الحل العددي$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ كمحاكاة للحل الدقيق $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), \dots, X(t_N)$ وبعد الحصول على $\Delta W_N \ ; \ n = 0,1,\dots,N$ وبالتالي يتحدد مسار واحد لعملية وينر عندئذٍ يمكن تقريب المؤثر التفاضلي باستخدام المؤثر الفرقي:

$$dX(t_n) \cong X(t_{n+1}) - X(t_n)$$

بتعويض هذا التقريب في المعادلة (1) وحساب الدوال f وg من أجل القيم المتقطعة x_n للحل نحصل على صيغة أويلر – ماریاما التكرارية لإيجاد الحل العددي للمعادلة (1) كالآتي:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n,t_n)h + g(x_n,t_n)\Delta W_n \qquad (2)$$

حيث $\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim N(0.h)$. $X(t_0) = x_0$, $n = 0,1,\dots,N-1$

تتقارب طريقة أويلر – ماریاما بدرجة قوية P=$\frac{1}{2}$ وبدرجة ضعيفة $\propto = 1$.

طريقة ميلستين Milstein Method [4] :

بأسلوب مشابه نوضح الطريقة بتطبيقها على المعادلة التفاضلية العشوائية (1) والتي تعطي بالعلاقة التكرارية :

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n,t_n)h + g(x_n,t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}g(x_n,t_n)g_x(x_n,t_n)[(\Delta W_n)^2 - h] \qquad (3)$$

حيث : $n = 1,0,\dots,N-1$, $X(t_0) = x_0$, $\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim N(0,h)$

تتقارب طريقة ميلستين بدرجة قوية p=1 وبدرجة ضعيفة $\propto = 1$.

طريقة رانج – كوتا Runge - kutta Method : [2]

تعطى طريقة رانج – كوتا من الرتبة الأولى القوية بتطبيقها بنفس الاسلوب على المعادلة التفاضلية العشوائية (1) بالعلاقة التكرارية :

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n,t_n)h + g(x_n,t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\left[g\left(x_n + g(x_n,t_n)\sqrt{h},t_n\right) - g(x_n,t_n)\right][(\Delta W_n)^2 - h]/\sqrt{h} \qquad (4)$$

حيث: $n = 0,1,\dots,N-1$.

$\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim N(0,h)$, $X(t_0) = x_0$

تتقارب طريقة رانج – كوتا بدرجة قوية P=1 وبدرجة ضعيفة $\propto = 1$.

2-النتائج و المناقشة

2-1- صياغة طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية:

نوضح الطريقة المطورة بأسلوب مشابه لطريقة ميلستين بتطبيقها على المعادلة التفاضلية العشوائية (1) حيث تعطى الطريقة بالعلاقة التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n,t_n)h + g(x_n,t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)g(x_n,t_n)g_x(x_n,t_n)[(\Delta W_n)^2 - h] \qquad (5)$$

حيث: $n = 0,1,\dots,N-1$

$\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim N(0,h)$, $X(t_0) = x_0$,

على افتراض g_x موجودة و مستمرة. ويتم تعريف معامل التصحيح $\theta(h)$ على النحو التالي:

$$\theta(h) = \frac{1}{1+\sqrt{h}}$$

تم اختيار معامل التصحيح التكيفي $\theta(h)$ لضبط الحد التصحيحي في الطريقة بما يتناسب مع حجم خطوة الزمن h. تحافظ هذه الصياغة على الدقة عند الخطوات الزمنية الصغيرة، بينما تزيد الاستقرار عند

الخطوات المتوسطة والكبيرة عن طريق تخفيف تأثير الحد العشوائي التصحيحي في ميلستين. يُلاحظ أن هذه الطريقة تتضمن طريقة ميلستين كحالة خاصة، حيث أنه عندما $h \to 0$ فإن $\theta(h) \to 1$، مما يعيد الصياغة إلى ميلستين التقليدية.

نقوم الآن بدراسة الخصائص العددية الأساسية للطريقة المطورة مثل الاستقرار والاتساق والتقارب القوي والتقارب الضعيف.

2-2 استقرار الطريقة المطورة: Stability of the developed Method

لدراسة الاستقرار العددي للطريقة المطورة نطبقها على مسألة الاختبار النموذجية الآتية [9]

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t) \qquad (6)$$

التي تخضع للشرط الابتدائي : $X(0)=X_0$

حيث إن μ و λ ثابتان حقيقيان ومن الواضح في نموذج الاختبار أن:

$$g(X(t),t) = \mu X(t) \ , \ f(X(t),t) = \lambda X(t)$$

يمتلك النموذج (6) الحل التحليلي: $X(t) = X(0)exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right)$

بقيمة ابتدائية $X(0)=1$ ، والحل الحقيقي لهذه المعادلة يكون مستقرا في المتوسط التربيعي إذا تحقق الشرط :

$$2\lambda + \mu^2 < 0 \qquad (7)$$

نطبق الطريقة المطورة على مسألة الاختبار:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n \ .t_n)h + g(x_n \ .t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)g(x_n,t_n)g_x(x_n \ .t_n)[(\Delta W_n)^2 - h]$$

حيث : $f(x_n,t_n) = \lambda X_n \ , \ g(x_n.t_n) = X_n \ , \ g_x(x_n,t_n) = \mu$

بالتالي $x_{n+1} = x_n + \lambda x_n h + \mu x_n \Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)(\mu x_n)\mu\,[(\Delta W_n)^2 - h]$

بإخراج x_n عامل مشترك:

$$x_{n+1} = x_n[1 + \lambda h + \mu\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]\,]$$

نربع ونحسب التوقع $E[|x_{n+1}|^2]$ فنجد:

$$|x_{n+1}|^2 = |x_n|^2\left|1 + \lambda h + \mu\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]\right|^2$$

$$E[|x_{n+1}|^2] = E[|x_n|^2]E[\left|1 + \lambda h + \mu\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]\right|^2]$$

$$R(h,\lambda,\mu,\theta) = E\ [|1 + \lambda h + \mu\Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]|^2]$$

$$R(h,\lambda,\mu,\theta) = E\ [(1 + \lambda h)^2 + (\mu\Delta W_n)^2 + (\frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h])^2 +$$
$$2(1 + \lambda h)(\mu\Delta W_n) + 2(1 + \lambda h)\left(\frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]\right)$$
$$+ 2(\mu\Delta W_n)\left(\frac{1}{2}\theta(h)\mu^2[(\Delta W_n)^2 - h]\right)]$$

ومن خصائص عملية وينر: $E[\Delta W_n]=0$ ، $E[(\Delta W_n)^2]=h$ ، $E[(\Delta W_n)^4]=3h^2$ وبعد الحساب ينتج لدينا: $E[((\Delta W_n)^2-h)^2]. = E[(\Delta W_n)^4-2(\Delta W_n)^2h+h^2] = h^2$ 2

$$\mathrm{R(h)} = (1+\lambda h)^2+\mu^2 h+\frac{1}{4}\theta(h)^2\mu^4(2h^2)$$

$$R(h) = 1+2\lambda h+\lambda^2h^2+\frac{1}{2}\theta(h)^2\mu^4h^2+\mu^2h \qquad (8)$$

تعريف(7)[16] : نقول عن طريقة عددية أنها مستقرة (stable) لأجل μ ، λ و h إذا كان: $\bar{R}(h,\lambda,\mu) = \|R(h,\lambda,\mu.ran)\| < 1$ ، حيث تدعى $\bar{R}$ دالة الاستقرار للطريقة العددية و ran يمثل متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي. إذا الطريقة مستقرة عندما يتحقق الشرط $R(h,\lambda,\mu) < 1$

أي $(1+\lambda h)^2+\mu^2h+\frac{1}{2}\theta(h)^2\mu^4h^2 < 1$

نستخدم دالة الاستقرار $\overline{R}$ في تحديد منطقة الاستقرار للطريقة المطورة ، بأخذ $\mu,\lambda\epsilon\ \mathbb{R}$ يمكننا رسم منطقة الاستقرار في المستوى o $x\ y$ حيث $x=\lambda h$ و $y=\mu^2h$ و يكون استقرار المسألة النموذجية هو : $x+\frac{1}{2}y<0$

وشرط استقرار الطريقة المطورة هو : $R(h) = 1+2x+x^2+y+\frac{1}{2}\theta^2y^2 < 1$

أي: $x^2+2x+y+\frac{1}{2}\theta^2y^2 < 0 \qquad (9)$

نرمز لمنطقة الاستقرار في المتوسط التربيعي للطريقة المطورة بـ $R(h)$ حيث:

$$R(h) = \{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2; y\geq 0 \text{ و } (9) \text{ محققة}\}$$

إذاً دالة استقرار الطريقة المطورة تعطى بالشكل : $R_D = 1+2x+x^2+y+\frac{1}{2}\theta^2y^2$

و في طريقة ميلستين الكلاسيكية يكون $\theta(h)=1$، بالتالي تصبح دالة الاستقرار :

$$R_M = 1+2x+x^2+y+\frac{1}{2}y^2$$

نحسب الفرق : $R_M-R_D = 1+2x+\ x^2+\ -\ 1-2x-x^2-y-\frac{1}{2}\theta^2y^2$

$y+\frac{1}{2}y^2$

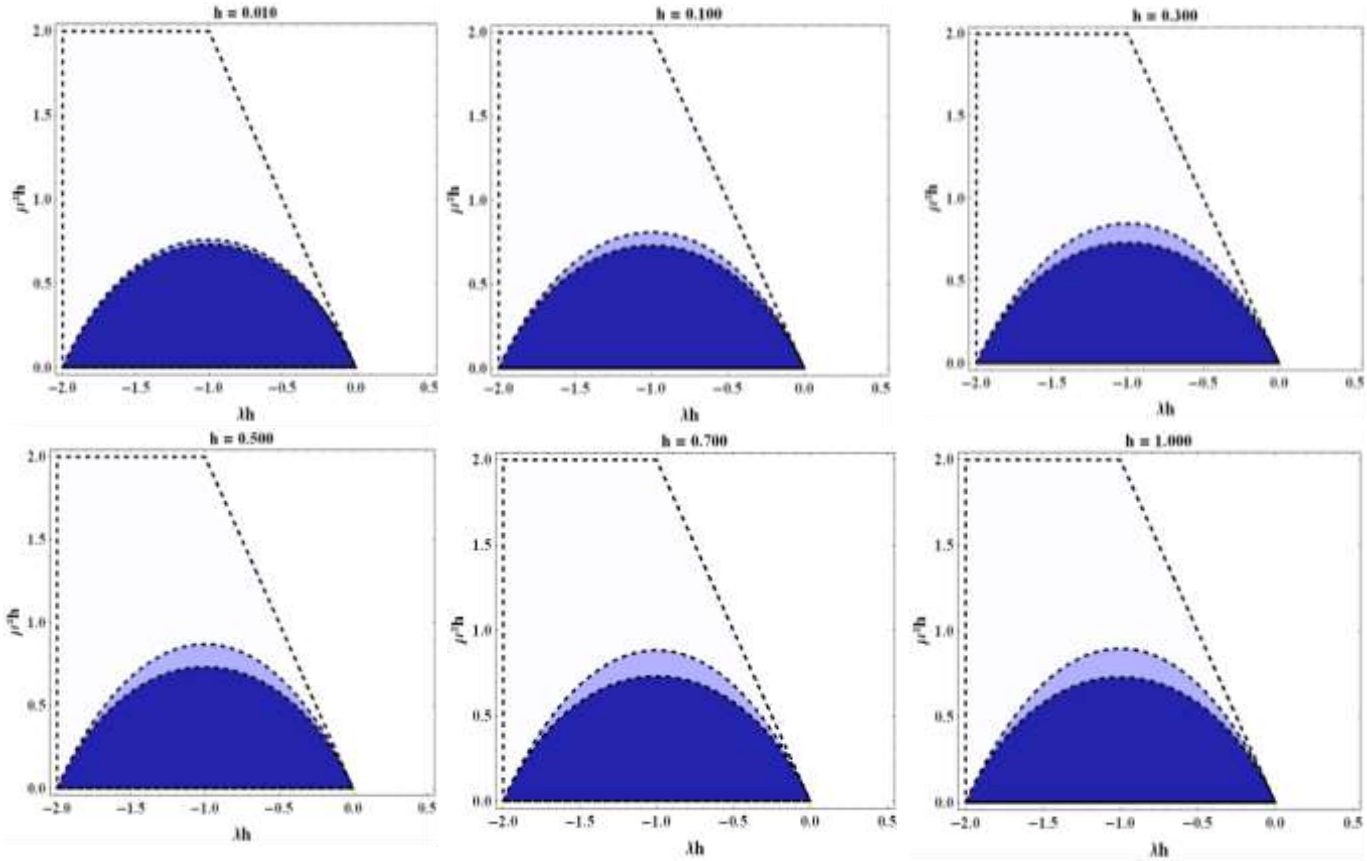
$$R_M-R_D = \frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}\theta^2y^2 = \frac{1}{2}y^2(1-\theta(h)^2)$$

بما أن لكل $h>0$ يكون $\theta(h)<1$ فإن $1\text{-}\theta(h)^2>0$ وبما أن $y=\mu^2h>0$ ، نحصل على:

$R_M-R_D>0$ أي $R_M>R_D$

و بأخذ قيم $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ تحقق الشرط (7) وقيم مختلفة لـ h سنوضح توسع منطقة الاستقرار للطريقة المطورة عندما تكون قيم h متوسطة أو كبيرة كما في الشكل (1) حيث المنطقة المظللة باللون الأزرق الغامق هي منطقة استقرار طريقة ميلستين والمنطقة المظللة باللون الأزرق الفاتح هي منطقة استقرار الطريقة المطورة.

الشكل (1) مقارنة بين منطقة استقرار طريقة ميلستين ومنطقة استقرار الطريقة المطورة



نتيجة(1) : إن منطقة استقرار الطريقة المطورة أوسع من منطقة استقرار طريقة ميلستين.

2-3-اتساق الطريقة المطورة : consistency of the developed method

تعريف (8) الاتساق consistent [17]: يقال عن طريقة عددية تنتج متتالية الحل العددي $\{x_n\}$ حيث n =0,1…,N أنها متسقة بمتوسط المربعات من المرتبة p إذا تحققت المتراجحة الآتية :

$$\max_{1\le n\le N}\left(E[|\delta_n|^2]\right)^{\frac{1}{2}} \le ch^p \quad ; \quad as \quad h\to 0$$

حيث δ_n الخطأ المقتطع الموضعي ، c ثابت موجب مستقل عن طول الخطوة h و E يمثل التوقع الرياضي.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية المعطاة وفق صيغة إيتو:

$$dX(t) = a(X(t),t)\,dt + b(X(t),t)dW(t) \qquad (10)$$

بحيث أن: $X(0) = X_0$, $t \in [0,T]$ و $W(t)$ تمثل عملية وينر القياسية والدالتان a و b تحققان الشروط التالية :

الشرط الأول: شرط ليبشتز [10] يوجد ثابت موجب L بحيث يتحقق:

$$|a(x,t)-a(y,t)| + |b(x,t)-b(y,t)| \le L|x-y| \; ; \forall\, x,y \in \mathbb{R} \;\; and \; t \in [0,T] \qquad (11)$$

الشرط الثاني : [10] يوجد ثابت موجب k بحيث يتحقق:

$$|a(x,t)| + |b(x,t)| \leq k(1+|x|)\,; \forall\, x \in \mathbb{R} \;\; and \; t \in [0,T] \qquad (12)$$

الشرط الثالث: المشتقة الجزئية $\frac{\partial b}{\partial x}$ موجودة والدالة

$(x,t) \to b(x,t)\frac{\partial b}{\partial x}$ (x,t) تحقق شرط ليبشتز ومحدودة على $\mathbb{R} \times [0,T]$ (13)

ولتكن $h = \Delta t = T/N$ خطوة الزمن و $t_n = nh$ و $\Delta W_{n+1} == W(t_{n+1}) - W(t_n)$

تعطى الطريقة العددية المقترحة بالصيغة:

$$x_{n+1} = x_n + a_n h + b_n \Delta W_n + \frac{1}{2}\theta(h) b_n \grave{b}_n [(\Delta W_n)^2 - h] \qquad (14)$$

حيث $\grave{b}_n = \frac{\partial b}{\partial x}(x_n,t_n),\ b_n = b(x_n,t_n)\ ,\ a_n = a(x_n,t_n)$

ومعامل التصحيح يعرف كما يلي: $\theta(h) = \frac{1}{1+\sqrt{h}}$

نعرف الخطأ المقتطع الموضعي عند الخطوة n بالشكل التالي: $\delta_n = X(t_{n+1}) - x_{n+1}$

باستخدام توسيع إيتو–تايلو حتى الرتبة الثانية يكتب الحل الحقيقي بالشكل:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + a_n h + b_n \Delta W_n + 1/2 b_n \grave{b_n}[(\Delta W_n)^2 - h] + R_n \qquad (15)$$

حيث الباقي R_n يحقق: $(E[|R_n|^2] \leq C_R h^3$ لثابت $C_R > 0$ مستقل عن h .

بالمقارنة مع الطريقة العددية المطورة نحصل على:

$$\delta_n = 1/2(1-\theta(h))\; b_n \grave{b_n}[\,(\Delta W_n)^2 - h] \; + R_n$$

باستخدام متراجحة المثلث $|A+B|^2 \leq 2|A|^2 + 2|B|^2$ نجد أن:

$$E[|\delta_n|^2] \leq 2E[|1/2(1-\theta(h))\; b_n \grave{b_n}[(\Delta W_n)^2 - h]|^2] + 2E[|R_n|^2]$$

و من الشروط المفروضة يوجد ثابت $M > 0$ بحيث أن: $|b_n| \leq M$ و $|\grave{b_n}| \leq M$

كما أن $(1-\theta(h)) = \frac{\sqrt{h}}{1+\sqrt{h}} \leq \sqrt{h}$

ومن خصائص عملية وينر: $E[\Delta W_n] = 0 = 3h^2$, $E[(\Delta W_n)^2] = h$. ، $E[(\Delta W_n)^4]$

نجد أن: $E[((\Delta W_n)^2 - h)^2] = E[(\Delta W_n)^4 - 2(\Delta W_n)^2 h + h^2] = 2\,h^2$

$$E[|\delta_n|^2] \leq 2\frac{1}{4} h M^4 2h^2 + 2C_R h^3 = Ch^3$$

حيث $c = c_1 + c_2$ مستقل عن h . و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على:

$$(E[|\delta_n|^2])^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{c}\; h^{3/2}$$

ومنه $\max_{1\leq n\leq N}(E[|\delta_n|^2])^{\frac{1}{2}} \leq ch^{3/2}$

فتكون الطريقة العددية المطورة متسقة محلياً بمتوسط المربعات من الرتبة 3/2

$$E[|R|^2] = N \times E[|\delta_n|^2] = T/h \times O(h^3) = O(h^2)$$

بأخذ الجذر التربيعي نحصل على : $(E[|R|^2])^{\frac{1}{2}} = O(h)$ و منه

$$\max_{1\leq n\leq N}(E[|R|^2])^{\frac{1}{2}} = O(h)$$

نتيجة (2): إن الطريقة المطورة متسقة كلياً من الرتبة الأولى.

2-4- التقارب القوي للطريقة المطورة strong convergence of the developed method

تعريف (9) : التقارب القوي strong convergence [12] :

عند حساب عدة مسارات للحل العددي، يعطى معيار التقارب القوي بمتوسط المربعات من المرتبة P لطريقة عددية كالآتي: $h \to 0$; as $\max_{1\leq n\leq N}(E[|e_k|^2])^{\frac{1}{2}} \leq ch^p$

وباعتبار أن المعادلة (10) تحقق الشروط الثلاث المذكورة سابقاً (11)، (12) و (13) و بفرض أن $X\ (t_n)$ الحل الحقيقي عند الزمن t_n فإننا نعرف خطأ التقريب بالشكل: $e_n := X(t_n) - x_n$

باستخدام توسيع إيتو تايلور حتى الرتبة الثانية يكتب الحل الحقيقي بالعلاقة :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + a_n h + b_n \Delta w_n + 1/2 b_n \grave{b_n}[(\Delta w_n)^2 - h] + R_n$$

بحيث أن: $a_n = (X(t_n),t_n)\ ,\ b_n = (X(t_n),t)\ ,\ \grave{b_n} = \frac{\partial b}{\partial x}(X(t_n),t_n)$

والباقي R_n يحقق $E[|R|^2] \le ch^3$ لثابت $c > 0$ مستقل عن h.

بطرح الطريقة العددية المطورة من التوسع أعلاه نحصل على :

$$e_{n+1} = e_n + [a(X(t_n),t_n) - a(x_n,t_n)]h + [b(X(t_n),t_n) - b(x_n,t_n)]\Delta W_n + \frac{1}{2}\big(1-\theta(h)\big) b_n \grave{b_n}[(\Delta W_n)^2 - h] + \frac{1}{2}\theta(h)[b_n \grave{b_n} - b(X_n,t_n)\grave{b}(X_n,t_n)][(\Delta W_n)^2 - h]$$

باستخدام متراجحة المثلث $|A+B|^2 \le 2|A|^2 + 2|B|^2$ وأخذ القيمة المتوقعة لتربيع معادلة الخطأ واستخدام متراجحة يونغ [10] : $2ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ من أجل أي $\varepsilon > 0$

و خصائص التوقع بالإضافة الى أن $|1-\theta(h)| = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h}}{1+\sqrt{h}} \le \sqrt{h}$

بالتالي: $(1-\theta(h))^2 E[((\Delta W_n)^2 - h)^2] \le h \cdot 2h^2 = 2h^3$

وباختيار مناسب لـ ε مستقل عن h في متراجحة يونغ نحصل على ثابت $c_2 > 0$ مستقل عن h بحيث أن:

$$E[|e_{n+1}|^2] \le (1 + c_2 h) E[|e_n|^2 + c_2 h^3$$

بتطبيق متراجحة جرونوال المتقطعة على المتتالية $u_n = E[|e_n|^2]$ و $u_0 = 0$

يصبح لدينا: $u_n \le c_2 h^3 \sum_{k=0}^{n-1} (1+c_2 h)^{n-1-k} = c_2 h^3 \frac{(1+c_2 h)^n - 1}{c_2 h} \le c_2 h^2 (1+c_2 h)^N$

وبما أن: $(1+c_2 h)^N \le e^{c_2 T}$ لأن $(1 + x \le e^x)$

فإن: $E[|e_n|^2] \le c_3 h^2\ ;\ \forall\ 0 \le n \le N$ لثابت $c = c_2 e^{c_2 T}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على: $\max_{0 \le n \le N}(E[|X(t_n) - x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{c_3} h = ch$

نتيجة (3) : إن الطريقة المطورة تتقارب بشكل قوي من الرتبة الأولى.

2-5-التقارب الضعيف للطريقة المطورة Weak convergence of the developed method

تعريف (10) : رتبة التقارب الضعيف Weak order of convergence [15]:

تعرف الرتبة الضعيفة للتقارب لطريقة عددية عشوائية بأنها أصغر أس $\propto$ بحيث يوجد ثابت c يحقق المتراجحة التالية :

$|E[g(X_t)] - E[g(x_n)]| \le ch^{\propto}$ من أجل أي دالة g .

بما أن المعادلة (10) تحقق الشروط القياسية المذكورة سابقاً(11) ، (12) و (13) ومن أجل أي دالة $g \in C_p^4(R)$

نعرف الدالة $u(x,t) := \equiv E_{x,t}[g(x_T)]$ عندئذ فإن $u \in C_p^{4.2}(R \times [0.T])$ وهي تحل معادلة كولموغوروف العكسية

$$\partial_t u + \mathcal{L} u = 0\ ;\ \ u(x,T) = g(x) \qquad (16)$$

حيث المعامل التفاضلي $\mathcal{L}$ معطى بـ $\mathcal{L}u = a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x,t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ونعرف الخطأ الضعيف الموضعي عند الخطوة n بـ : $\varepsilon_n = E[u(x_{n+1}, t_{n+1})] - u(x_n,t_n)$

وبإستخدام توسيع إيتو تايلور لـ u عند (x_n,t_n) حتى الرتبة الثانية وحساب التوقع الشرطي بإستخدام خصائص ΔW_n

نحصل على:

$$\mathrm{E}[\mathrm{u}(x_{n+1},t_{n+1})] = u + (\partial_t u + \pounds u)h + R_n$$

حيث الباقي R_n يحقق $|R_n| \le ch^2$ لثابت c مستقل عن h وبما أن u تحل (16) فإن $\partial_t u + \pounds u = 0$ وبالتالي ينتج أن:

$$|\varepsilon_n| \le h^2 \qquad (17) \qquad \text{مع} \qquad \varepsilon_n = R_n \quad \text{و أن:}$$

$$E[g(X_t) - E(g(x_n)] = E[u(x_0,0)] - E[u(x_n,t)] = -\sum_{n=0}^{N-1} E[\varepsilon_n]$$

من (17) نجد أن:

$$|E[g(X_t) - E(g(x_n)]| \le \sum_{n=0}^{N-1} E[|\varepsilon_n|] \le Nch^2 = cTh$$

أي ينتج أنه من أجل كل دالة اختبار $\mathrm{g} \in \mathrm{C_p^4}(R)$ يوجد ثابت $c_g = cT > 0$ بحيث يتحقق:

$$|E[g(X_t)] - E[g(x_n)]| \le c_g h$$

نتيجة (4): إن الطريقة المطورة تتقارب بضعف من الرتبة الأولى.

2-6 الاختبارات العددية :

يتم اختبار فعالية الطريقة المطورة بتطبيقها لحل عدة مسائل اختبار نموذجية في المعادلات التفاضلية العشوائية خطية وغير خطية بهدف توضيح فعالية الطريقة من خلال مقارنتها مع ثلاث طرائق مختلفة هي: أويلر– ماریاما Euler-Maryama وطريقة ميلستين Milisten وطريقة رانج– كوتا Rung-Kutta وتم استخدام لغة البرمجة Mathematica لإعداد البرامج اللازمة.

مسألة (1) [10]: لنأخذ المسألة الخطية الآتية:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

لها الحل التحليلي (الدقيق) :

$$X_t = X_0 eXP\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right)$$

نحل المسألة على المجال [0,1] باستخدام القيم $X_0 = 1.8$, $a = -0.9$, $b = 1.3$ مع M=100000 محاكاة وخطوة زمنية $h = 0.1$ بالطرائق الأربعة: أويلر – ماریاما و ميلستين و رانج – كوتا القوية والطريقة المطورة.

ندرج الجدول (1) نتائج مقارنة متوسط الخطأ التربيعي(MSE) لكل طريقة باستخدام الخطوات $h_i = 0.1i$ حيث $i =. 1, \dots, 10$ المقارنة هنا تعتمد على التقارب القوي حيث يتم حساب MSE لكل مسار بالمقارنة مع الحل التحليلي لنفس المسار. كما تم استخدام نفس المسارات العشوائية للطرائق الأربعة. ونلاحظ انه كلما كانت الخطوة h_i أصغر كلما تضاءل الخطأ وهذا يشير الى تقارب الحل العددي . كما يُلاحظ أن قيم (MSE) لطريقتي ميلستين ورانج–كوتا القوية متطابقتان عند كل خطوة زمنية، وهذا يرجع إلى الطبيعة الخطية للمسألة، حيث يؤدي هذا النوع من المعادلات إلى سلوك متشابه لكلتا الطريقتين. نرسم في الشكل (2) مقارنة (MSE) للطرائق : أويلر– ماریاما ○ و ميلستين > و رانج – كوتا □ و الطريقة المطورة ■ .كما نلاحظ أن منحني الطريقة المطورة يقع تحت جميع المنحنيات الأخرى مما يشير الى تفوقها في الدقة. كما أن

الطريقة المطورة تحافظ على أدنى قيمة خطأ مقارنة بالطرق الاخرى خاصة عند الخطوات الكبيرة. بالإضافة إلى ذلك، في الجدول (2) تم إدراج تحليل إحصائي لقيم متوسط مربع الخطأ لكل طريقة، و نلاحظ أن الطريقة المطوَّرة تظهر أصغر وسيط، وأصغر انحراف معياري، وأصغر تباين مقارنة بالطرق الأخرى، مما يدل على أن الخطأ ليس فقط أقل في المتوسط، بل أيضاً أكثر انتظاماً واستقراراً عبر جميع الخطوات الزمنية.

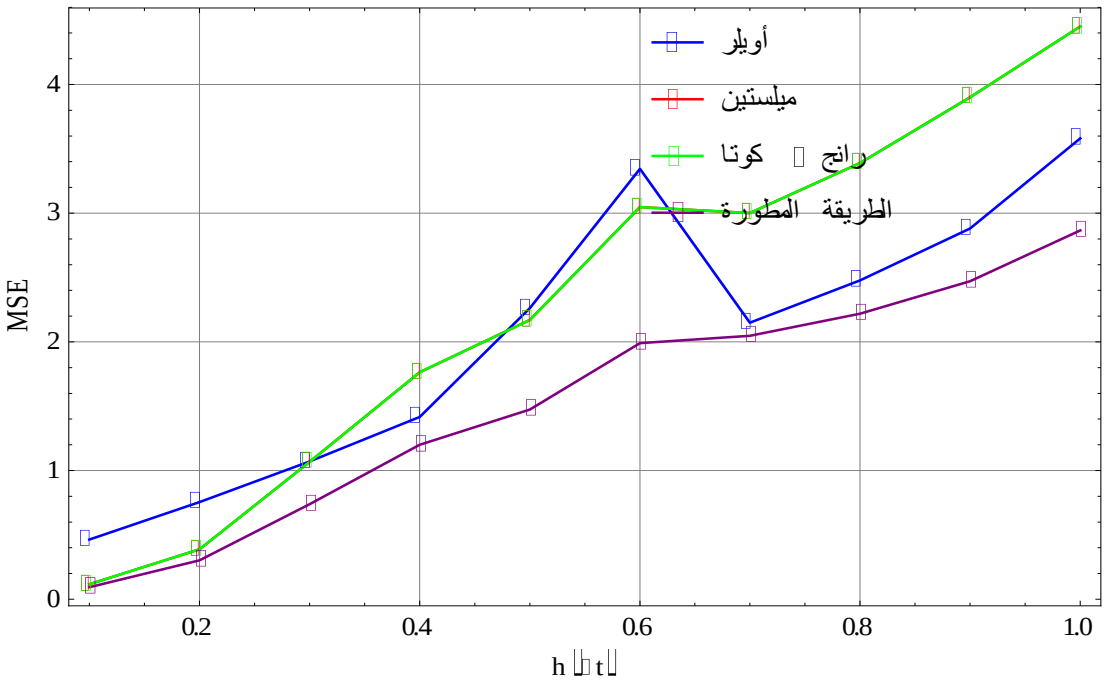
الجدول (1) مقارنة متوسط الخطأ التربيعي (MSE) للطرائق الأربعة باستخدام خطوات مختلفة

طول الخطوة h	أويلر – ماریاما	ميلستين	رانج –كوتا	الطريقة المطورة
0.1	0.463833	0.117093	0.117093	0.0934024
0.2	0.754495	0.388468	0.388468	0.302433
0.3	1.07041	1.06733	1.06733	0.739235
0.4	1.41672	1.76375	1.76375	1.20046
0.5	2.26206	2.17023	2.17023	1.47418
0.6	3.34457	3.04771	3.04771	1.99021
0.7	2.1497	3.00122	3.00122	2.04705
0.8	2.47798	3.38951	3.38951	2.21839
0.9	2.8808	3.90084	3.90084	2.47195
1.0	3.58031	4.45009	4.45009	2.86541

الجدول (2) تحليل احصائي لقيم متوسط الخطأ التربيعي (MSE) للطرائق الأربعة

اسم الطريقة	الانحراف المعياري	الوسيط	التشتت
أويلر – ماریاما	1.8012	2.20588	1.16666
ميلستين	1.47789	2.58572	2.18416
رانج – كوتا	1.47789	2.58572	2.18416
الطريقة المطورة	0.93869	1.73219	0.88114

الشكل (2) مقارنة (MSE) للطرائق الأربعة



المسألة (2) : [10] لتكن المسألة الثانية غير خطية :$dX_t = -a^2 X_t(1 - X^2{}_t)dt + a(1 - X^2{}_t)dW_t$

لها الحل التحليلي (الدقيق) : $X_t = \tanh(aW_t + arc\tanh X_0)$

نحل المسألة على المجال [0,1] باستخدام القيم $X_0 = 0.6$، a =1.0 مع M = 10000 محاكاة وخطوة زمنية

h = 0.1 بالطرائق الأربعة: إويلر–ماریاما ، ميلستين، رانج–كوتا القوية، والطريقة المطورة.

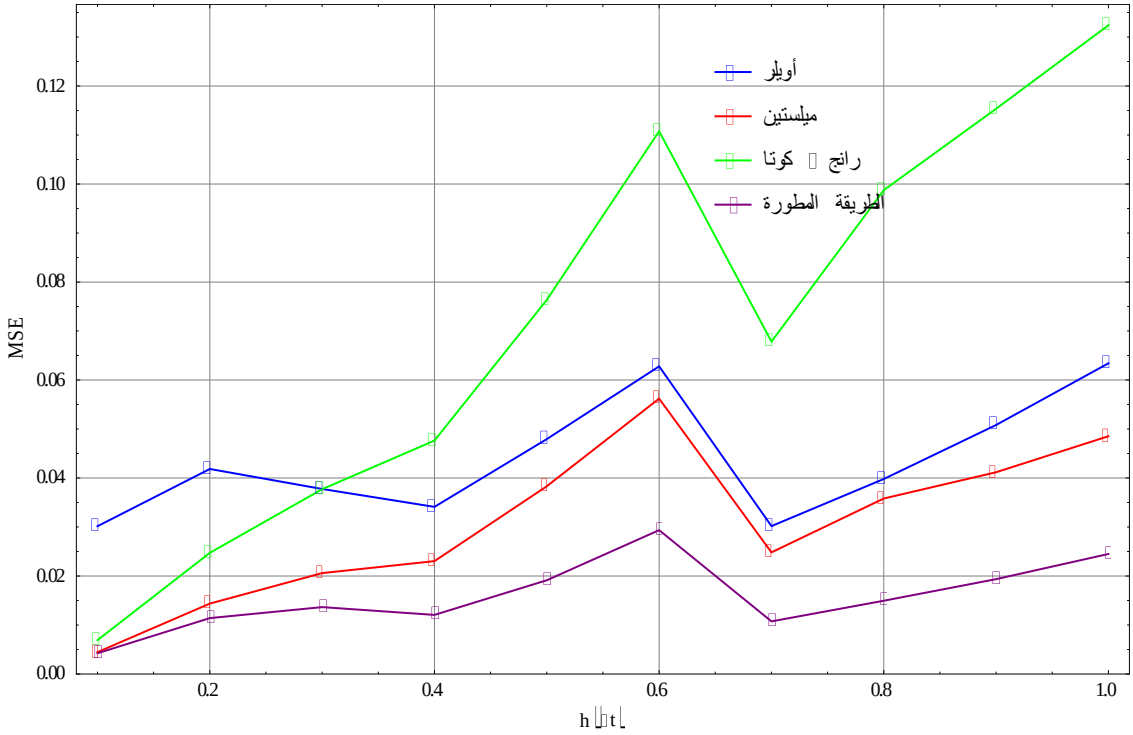
ندرج الجدول (3) نتائج مقارنة متوسط الخطأ التربيعي(MSE) لكل طريقة باستخدام الخطوات $h_i = 0.1i$ حيث $i =. 1, \dots, 10$ المقارنة هنا تعتمد على التقارب القوي حيث يتم حساب MSE لكل مسار بالمقارنة مع الحل التحليلي لنفس المسار. كما تم استخدام نفس المسارات العشوائية للطرائق الأربعة. ونلاحظ انه كلما كانت الخطوة h_i أصغر كلما تضاءل الخطأ وهذا يشير الى تقارب الحل العددي. نرسم في الشكل (3) مقارنة (MSE) للطرائق : أويلر– ماریاما ○ و ميلستين > و رانج – كوتا □ و الطريقة المطورة ■ .كما نلاحظ أن منحني الطريقة المطورة يقع تحت جميع المنحنيات الأخرى مما يشير الى تفوقها في الدقة. كما أن الطريقة المطورة تحافظ على أدنى قيمة خطأ مقارنة بالطرق الاخرى خاصة عند الخطوات الكبيرة. بالإضافة إلى ذلك، في الجدول (4) تم إدراج تحليل إحصائي لقيم متوسط مربع الخطأ لكل طريقة، و نلاحظ أن الطريقة المطوَّرة تظهر أصغر وسيط، وأصغر انحراف معياري، وأصغر تباين مقارنة بالطرق الأخرى، مما يدل على أن الخطأ ليس فقط أقل في المتوسط، بل أيضاً أكثر انتظاماً واستقراراً عبر جميع الخطوات الزمنية في المعادلات غير الخطية أيضاً.

الجدول (3) مقارنة متوسط الخطأ التربيعي (MSE) للطرائق الأربعة باستخدام خطوات مختلفة

طول الخطوة h	أويلر – ماریاما	ميلستين	رانج– كوتا	الطريقة المطورة
0.1	0.0301577	0.0044619	0.00690166	0.00423302
0.2	0.0418517	0.0143606	0.0247053	0.0113851
0.3	0.0377444	0.0205814	0.0376977	0.0136483
0.4	0.0341188	0.0230218	0.047626	0.0120652
0.5	0.0479416	0.0383103	0.0763315	0.0191192
0.6	0.0627848	0.0562093	0.11077	0.0293643
0.7	0.030176	0.0248253	0.0678242	0.0107208
0.8	0.039802	0.035828	0.0987479	0.0149523
0.9	0.0508259	0.041169	0.115351	0.0193603
1.0	0.06339	0.0485332	0.132403	0.02448

الجدول (4) تحليل احصائي لقيم متوسط الخطأ التربيعي (MSE) للطرائق الأربعة

اسم الطريقة	الانحراف المعياري	الوسيط	التشتت
أويلر – ماريما	0.012168	0.04082	0.000148
ميلستين	0.016034	0.03032	0.000257
رانج – كوتا	0.042200	0.072077	0.001780
الطريقة المطورة	0.007312	0.014300	0.0000534



الشكل (3) مقارنة (MSE) للطرائق الأربعة

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا بتطوير واختبار طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية من البعد الواحد، ومقارنتها بالطرائق العددية الكلاسيكية (أويلر–ماريما، ميلستين، رانج–كوتا). لتقييم فعالية ودقة الطريقة المطورة، تم دراسة كل من اتساق الطريقة، الاستقرار، التقارب القوي، والتقارب الضعيف، مع إجراء اختبارات عددية على مسائل نموذجية خطية وغير خطية من نفس نمط المسألة المطروحة. تشير النتائج إلى ما يلي:

1- الطريقة المطورة تمتلك منطقة استقرار أوسع مقارنة بطريقة ميلستين، مما يعكس تفوقها العددي ومرونتها في التطبيقات.

2- الطريقة المطورة متسقة كلياً من الرتبة الأولى، وهو ما يضمن صحة النتائج العددية على المدى القصير والطويل.

3- التقارب القوي للطريقة المطورة من الرتبة الأولى، مماثل للطرائق الكلاسيكية الدقيقة.

4- التقارب الضعيف للطريقة المطورة من الرتبة الأولى، مما يؤكد موثوقية النتائج عند دراسة المتوسطات العددية.

تم استخدام لغة البرمجة Mathematica لتطبيق الطريقة المطورة وتنفيذ المقارنات العددية، حيث أظهرت النتائج تفوق الطريقة المطورة على الطرائق الكلاسيكية من حيث الدقة والاستقرار، عند حل المسائل الخطية وغير الخطية على حد سواء.

التوصيات:

استخدام الطريقة المطورة في حل معادلات تفاضلية عشوائية ذات أبعاد أعلى.

استخدام الطريقة المطورة في حل معادلات تفاضلية عشوائية مع مسارات عشوائية ذات تغير حاد.

تطوير طرائق هجينة إضافية تجمع بين ميزات الطرق الكلاسيكية والطريقة المطورة لتعزيز الأداء العددي.

المراجع (References)

[1] AMINI, M. SOHEILI, A. ALLAHDAI, M. *Numerical solution of stochastic differential equations corresponding to continuous distributions* , Communications of the Korean Mathematical Society, 2011, Vol. 26, pp. 709–720.

[2] BAAZAOUI, R. OUERDIANE, H. *A comparative study of numerical simulation of stochastic differential equations: application to stochastic Duffing-Oscillator*, International Journal of Mathematical Analysis, 2014, Vol. 8, No. 5, pp. 229–245.

[3] BISWAS, S. KUMAR ,C. NEELIMA, DOS REIS, G. REISINGER, C. *An explicit Milstein-type scheme for interacting particle systems and McKean–Vlasov SDEs with common noise and non-differentiable drift coefficients*, arXiv preprint, 2022.

[4] BRITES, N. *Lecture Notes on Stochastic Differential Equations and Applications*, University of Lisbon, 2023. pp. 25-55.

[5] DHANPAL, A. M. *Numerical methods to solve stochastic differential equations*, Master of Engineering Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, McGill University, Montreal, Canada, 2021.

[6] ERNST, P. A. SOLEYMANI, F. *A Legendre-Based Computational Method for Solving a Class of Itô Stochastic Delay Differential Equations*, Numerical Algorithms, Springer Nature, 2018, pp. 1–16.

[7] GERENCSÉR, M. LAMPL, G. LING, C. *The Milstein scheme for singular SDEs with Hölder continuous drift*, IMA Journal of Numerical Analysis, 2025, Vol. 45, pp.1–28.

[8] HIGHAM, D. J. *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, SIAM Review, 2001, Vol. 43, No. 3, pp. 525–546.

[9] HIGHAM, D. J. MAO, X. SZPRUCH, L. *Convergence, non-negativity and stability of a new Milstein scheme with applications to finance*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2013, Vol. 18, No. 8, pp. 2083–2100.

[10] KLOEDEN, P. E. PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.pp.51-506.

[11] MAHMOUD, S. AL-WASSOUF, A. EHSAAN, A. S. *Numerical spline method for simulation of stochastic differential equations systems* , Arab Journal of Sciences & Research Publishing, 2021, Vol. 5, No. 4, pp. 1–20.

[12] MAHMOUD, S. AL-WASSOUF, A. EHSAAN, A. S. *Numerical techniques for solving systems of stochastic differential equations*, Journal of Tishreen University for Sciences, 2021, Vol. 43, No. 2, pp. 1–15.
[13]MARUYAMA, G. *Continuous Markov processes and stochastic equations*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1955, Vol. 4, No. 1, pp. 48–90.
[14]MILSTEIN, G. N. Approximate Integration of Stochastic Differential Equations, Theory of Probability and Its Applications, 1974, Vol. 19, No. 3, pp. 557–562.
[15] SÄRKKÄ, S. SOLIN, A. *Applied Stochastic Differential Equations: Numerical Simulation of SDEs*, in: IMS Textbooks Series, Cambridge University Press, 2019.
[16] WANG, P. *Three-stage stochastic Runge–Kutta methods for stochastic differential equations* , Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, Vol. 222, pp. 324–333.
[17] ZHENG, Y. *Asset pricing based on stochastic delay differential equations* , Ph.D. Thesis, Iowa State University, 2015.