مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (٢) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (2) 2026

# نظريات الطمر الأمثل في فضاءات RIS ذات التراكيب من نوع لورنتز وأورلتش والكمون

**سلمان صلاح عيسى** *

**(تاريخ الإيداع ١٣/١١/ ٢٠٢٥ – تاريخ النشر٨/٤/ ٢٠٢٦)**

**□ ملخّص □**

في هذا البحث نطور نظرية موحدة للطمر من النمط التكاملي (potential-type embeddings) في فضاءات دوال باناخ اللامتغيرة والمعاد ترتيبها. ومن خلال إدخال دالة منظمة عامة– نسبة الطمر $R_{X,Y}(t)=\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)}$ – توحد نتائجنا عدداً من المتراجحات الكلاسيكية – كمتراجحات سوبوليف وهاردي ، ليتليود وآدامز– وتمتد إلى السياقات ذات النمو المتغير والمختلط. وتعتمد المقاربة على حجج هندسية لإعادة الترتيب مقترنة بتقديرات تكاملية وتقنيات الأستيفاء التحليلي. كما نناقش بعض التطبيقات على المؤثرات الكسرية وغير الخطية.

تقدم النظرية المطورة في هذا البحث منظوراً تحليلياً جديداً يدمج بين الجوانب الهندسية والدالية في تحليل الدوال التكاملي.

**الكلمات المفتاحية:** طمر فضاء لورنتز–أورلتش، الطمر المستمر، الطمر المضغوط، الفضاءات اللامتغيرة ومعاد ترتيبها ، الثوابت الأمثل.

*دكتوراه في الرياضيات البحتة 2024 من جامعة حمص

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (١٠) العدد (٢) ٢٠٢٦

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (10) No. (2) 2026

# Optimal Embedding Theorems in Rearrangement-Invariant Banach Function Spaces: Lorentz, Orlicz, and Potential-Type Structures

**Sulman Salah Issa ***

**(Received 13/11/2025.Accepted 8/4/2026)**

**□ABSTRACT □**

This paper develops a unified theory of potential-type embeddings in rearrangement-invariant Banach function spaces. By introducing a universal functional invariant — the embedding ratio $R_{X,Y}(t) = \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)}$ — we provide necessary and sufficient conditions for the continuity and compactness of embeddings between general potential spaces. The framework covers Lorentz, Orlicz, and Bessel–Riesz structures and yields explicit expressions for the optimal embedding constant $C_{opt}$. Our results unify several classical inequalities, including those of Sobolev, Hardy–Littlewood, and Adams, and extend them to variable and mixed growth contexts. The approach relies on geometric rearrangement arguments combined with potential estimates and interpolation theory. Applications to fractional and nonlinear operators are also discussed. The theory presented herein provides a new analytic perspective that integrates the geometric and functional aspects of modern potential analysis.

**Keywords**Rearrangement-invariant spaces; Lorentz spaces; Orlicz spaces; continuous embedding; compact embedding; optimal constants.

*. Ph.D. in Mathematics 2024 ( Homs University)

## المقدمة

يلعب الطمر الدالي بين فضاءات باناخ اللامتغيرة والمعاد ترتيبها ( Rearrangement-invariant (RI) Banach function spaces) دوراً هاماً في التحليل الدالي ونظرية الكمون (potential theory) ونظرية المعادلات التفاضلية الجزئية. حيث يصف الطمر الكلاسيكي لفضاءات سوبوليف والكمون التوازن التحليلي بين النعومة (الملساء) والتكاملية، كما أن تعميماتها إلى الأطر اللامتغيرة والمعاد ترتيبها توفر أداة قوية لدراسة المؤثرات غير الخطية والخواص الدقيقة للدوال. ويمكن تتبع أسس هذه النظرية إلى الأعمال الرائدة لكل من هاردي وليتليود وبولا ، وآدامز وهيدبرغ وشاربلي في حيث وضعت أول مرة الصيغة التحليلية لسلوك الدوال المعاد ترتيبها والاستيفاء. (Adams and Hedberg, 1996; Bennett and Sharpley, 1988)

قدمت فضاءات لورنتز وأورلتش ومارسينكيفيتش بيئة طبيعية لتحليل المشكلات التي تتجاوز نطاق مقاييس ليبغ الكلاسيكية. إذ يجمع إطار أورلتش–لورنتز بين مرونة النمو وعدم التغيير الهندسي لإعادة الترتيب، مما يتيح تحكماً دقيقاً في ظواهر الطمر والاستيفاء. وقد أثبتت هذه الفضاءات أهميتها في دراسة المعادلات الإهليليجية ذات النمو غير القياسي وفي نظرية انتظام المعادلات الكسرية.

شهد العقد الأخير تجدداً كبيراً في الاهتمام بالنظرية الكمية للطمر الأمثل. فقد قدمت أعمال سيانكي وبيك (Cianchi and Pick, 2020)، وفيورنزا ومتعاونوه (Cruz-Uribe and Fiorenza, 2018) ، وهاروسكي وسكجريبزاك (Haroske and Skrzypczak, 2019) معايير تحليلية جديدة تصف سلوك الطمر الأمثل والمضغوط في الأطر غير المتغيرة والمعاد ترتيبها . وقد تم مؤخراً توسيع هذه التطورات إلى السياقات الكسرية وغير الخطية، كما أوضح راكوتوسون وتيمام (Rakotoson and Temam, 2023)، حيث أثبتا متراجحات دقيقة لمؤثرات الكمون غير المحلية.

ورغم هذا التقدم، ظل غائباً توصيف موحد وشامل يلتقط في آن واحد خصائص الاستمرارية والانضغاط والثابت الأمثل للطمر بين فضاءات الكمون العامة اللامتغيرة وعاد ترتيبها. وعلى وجه الخصوص، في حين يمكن التعبير عن متراجحات سوبوليف الكلاسيكية في صورة أسيات بسيطة، فإن بنية الطمر في فضاءات أورلتش والانواع المختلطة أكثر دقة وتعقيداً. (Cianchi and Pick, 2020; Haroske and Skrzypczak, 2019)

يتناول هذا البحث هذا النقص من خلال إدخال دالة منظمة – نسبة الطمر $R_{X,Y}(t) = \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)}$

يوحد هذا الكيان التحليلي عدداً كبيراً من المتراجحات الكلاسيكية تحت معيار هندسي واحد، ويسمح بحساب صريح للثابت الأمثل $C_{opt}$.

تعتمد دراستنا على ثلاث خطوات رئيسية:

- إقامة شروط ضرورية وكافية للطمر بين فضاءات الكمون المبنية على شبكات باناخ العامة اللامتغيرة والمعاد ترتيبها.
- اشتقاق صيغ صريحة لنسبة الطمر $R_{X,Y}$ في أطر لورنتز وأورلتش وبيسل–ريز، والحصول على معايير مكافئة تامة للانضغاط والاستمرارية.
- تحديد السلوك التقاربي الدقيق للثابت الأمثل للطمر وتقديم توصيفات حادة تستعيد جميع متراجحات سوبوليف كحالات خاصة.

نقدم في القسم الثاني التعاريف والمفاهيم الرئيسية والقسم الثالث النظرية التجريدية للطمر ثم نطبق في القسم الرابع هذه النتائج على فضاءات لورنتز وأورلتش وبيسل – ريز بالاعتماد على معايير الطمر الأمثل.

**2. التعاريف والمفاهيم الرئيسية**

ليكن $(X, \Sigma, \mu)$ فضاء قياس ، نفترض أن جميع الفضاءات المدروسة هي فضاءات RIS على $\mathbb{R}^n$ ، ونرمز للدالة الأساسية لكل فضاء $X$ بالرمز $\varphi_X(t)$.

**تعريف 2.1** : من أجل كل دالة قابلة للقياس $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، تُعرف دالة التوزيع كما يلي:

$$\mu_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|, \qquad \lambda \geq 0 \qquad (2.1)$$

والدالة اللامتغيرة ومعاد ترتيبها

$$f^*(t) = inf\{\lambda > 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}, t > 0 \quad (2.2)$$

وهي دالة متناقصة مستمرة من اليمين ومتساوية بالقياس مع $|f|$. حيث الدالة $f^*$ تعيد ترتيب القيم أياً كان موقعها في $\mathbb{R}^n$ .(Hardy, Littlewood and Pólya, 1952).

**تعريف 2.2**: يقال إن فضاء باناخ (أو شبه باناخ) $X$ من الدوال القابلة للقياس على $\mathbb{R}^n$ أنه فضاء لامتغير ومعاد الترتيب (اختصاراً RIS) إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية::

$$f \in X \Rightarrow |f| \in X \; and \; ||f||_X = || \, |f| \, ||_X$$

$$if \; 0 \leq g \leq f \; a.e. and \; f \in X, then \; g \in X \; and \; ||g||_X \leq ||f||_X$$

$$if \; f, g \; are \; equimeasurable \; (f^* = g^*), then \; ||f||_X = ||g||_X \, .$$

إن هذه الشروط تضمن أن يعتمد النظيم على الدالة اللامتغيرة ومعاد ترتيبها $f^*$ وليس على التوزيع المكاني لـ $f$. (Bennett and Sharpley, 1988)

**تعريف 2.3**: لكل $t > 0$ ، تعرف الدالة الأساسية للفضاء $X$ بـ :

$$\varphi_X(t) = ||\chi_E||_X \;\; \forall \;\; |E| = t \qquad (2.3)$$

تسلك الدالة $\varphi_X$ سلوك القياس في الفضاء $X$ ، وفي الواقع سيعبر عن العديد من نتائج الطمر لاحقاً بدلة نسبة الدالتين $\varphi_Y(t)$ و $\varphi_X(t)$ ، والدالة $\chi_E$ هي دالة المؤشر .(Adams and Hedberg, 1996)

**ملاحظة 2.4** : بما أن $f^*$ و $g^*$ لهما نفس دالة التوزيع $\mu_f = \mu_g$، فإن أي نظيم لامتغير ومعاد ترتيبه يعتمد فقط على$f^*$ . وبالتالي يمكن اختزال المتراجحات متعددة الأبعاد على $\mathbb{R}^n$ إلى متراجحات تكاملية أحادية البعد تتضمن $f^*$ و $\varphi_X$.

**2.2 مؤشرات بويد ومؤثرات التمدد:** من أجل كل $s > 0$ ، نعرف مؤثر التمدد$D_s$ الذي يؤثر على دالة قابلة للقياس $h: (0, \infty) \to R$ بالعلاقة:

$$(D_s \, h)(t) = h\left(\frac{t}{s}\right), t > 0 \qquad (2.4)$$

يصف التطبيق $s \mapsto ||D_s||_{X \to X}$ كيف يتغير نظيم الفضاء $X$ تحت تأثير التمديد. ويستخدم سلوكه عند النهايات لتعريف مؤشرات بويد (Boyd Indices) .

**تعريف 2.5 (مؤشرات بويد):** بفرض أن كل مؤثر تمدد $D_s$ محدود على الفضاء $X$ ، تعرف مؤشرات بويد السفلى والعليا بالعلاقات:

$$p_X^- = lim_{s \to 0^+} \, log \frac{s}{log||D_s||_{X \to X}} \, , p_X^+ = lim_{s \to \infty} \, log \frac{s}{log||D_s||_{X \to X}} \qquad (2.5)$$

وعندما توجد هاتان النهايتان نحصل على: $1 \le p_X^- \le p_X^+ \le \infty$. (Bennett and Sharpley, 1988)

**توطئة 2.6 (الخصائص الأساسية لمؤشرات بويد):** ليكن $X$ فضاء لامتغير ومعاد الترتيب $RIS$. عندئذٍ:

1. مؤشرا بويد $p_X^-$ و $p_X^+$ ثابتين بالنسبة للنظم المتكافئة.
2. إذا كان $X = L^p$ فإن $p_X^- = p_X^+ = p$.
3. إذا كان $X = L^{p,q}$ (فضاء لورنتز) فإن $p_X^- = p_X^+ = p$ ، أما في حالة $X = L^{\Phi}$ فإن المؤشرين يتوافقان مع مؤشري ماتوشفسكا – أورلتش (Matuszewska–Orlicz Indices) للدالة $\Phi$ .
4. تتحكم هذه المؤشرات في خصائص الطمر والاستيفاء بين الفضاءات اللامتغيرة ومعاد ترتيبها $RIS$ . (Bennett and Sharpley, 1988)

**البرهان:** تنتج العبارات (3)–(1) مباشرة من تعريف مؤشر التمديد $||D_s||$ ومن الدالة الأساسية $\varphi_X$ كما هي في العلاقة (2.3) . أما البند (4) فهو نتيجة معروفة وكلاسيكية □

### 2.3 مؤثرات الكمون وفضاءات الكمون

**تعريف 2.7 (كمون ريز):** من أجل كل $0 < \alpha < n$ ، يُعرّف مؤثر الكمون من نوع ريز $I_\alpha$ على الدالة $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ كمايلي:

$$(I_\alpha\, g)(x) = \int_{R^n} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad (2.6)$$

ويحقق خاصية التحجيم التالية :

$$I_\alpha(g_s)(x) = s^\alpha\, (I_\alpha\, g)(sx), g_s(x) = g(sx) \quad (2.7)$$

(Adams and Hedberg, 1996)

**تعريف 2.8 (فضاءات الكمون):** إذا كان $X$ فضاء $RIS$ على $\mathbb{R}^n$ و $0 < \alpha < n$ ، فإننا نعرف فضاء الكمون المرتبط بـ$X$ كالآتي:

$$H^{\alpha,X}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc(R^n)}: \exists g \in X, f = I_\alpha g\} \quad (2.8)$$

ويعطى النظيم الطبيعي في هذا الفضاء بالعلاقة:

$$||f||_{H^{\alpha,X}} = inf\{||g||_X: f = I_\alpha\, g\} \qquad (2.9)$$

تمثل هذه الفضاءات تعميماً لفضاءات سوبوليف الكلاسيكية $W^{\alpha,p}$. (Adams and Hedberg, 1996)

**ملاحظة 2.9 (علاقة فضاءات الكمون مع فضاءات سوبوليف – بيسل):** عندما يكون $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ و $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ فإننا نحصل على الآتي:

$$H^{\alpha,L^p} = W^{\alpha,p} \qquad (2.10)$$

وعند استبدال مؤثر ريز $I_\alpha$ بالمؤثر من نوع بيسل $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ ، نحصل على فضاءات متكافئة.
(Hardy, Littlewood and Pólya, 1952)

**مبرهنة مساعدة 2.10:** من أجل كل $0 < \alpha < n$ و $g \in L^1_{loc(R^n)}$ يوجد ثابت $C > 0$ بحيث:

$$(I_\alpha g)^*(t) \le C \left[ t^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^t g^*(s)ds + \int_t^\infty s^{-\frac{\alpha}{n}} g^*(s)ds \right] \quad (2.11)$$

**البرهان:** يعتمد على تحليل هيدبرغ والعلاقات (2.2)–(2.1) . □

**توطئة 2.10** (ضبط النظيم بواسطة الدوال الأساسية)

إذا تحقق الشرط: $\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \le C_0$ من أجل كل $t > 0$ ، فإن المؤثر $I_\alpha: X \to Y$ يكون محدوداً بحيث:

$$||I_\alpha g||_Y \le C||g||_X \qquad (2.12)$$

**البرهان:** يتم البرهان بدمج التوطئة 2.10 مع الملاحظة 2.4 والعلاقة (2.3). □

**ملاحظة 2.12 :** يعبر الشرط (2.12) عن توازن التحجيم بين مؤثر الكمون $I_\alpha$ ونمو النظيمين في الفضائين $X$ و $Y$ .

**2.4 المؤثرات الأحادية البعد من نوع هاردي**

**تعريف 2.13 (مؤثر هاردي):** لأي دالة $h: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ يُعرف مؤثرهاردي بالشكل:

$$(Hh)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t h(s)ds \ , t > 0 \qquad (2.13)$$

كما يعرف بالوزن بالعلاقة:

$$\left(H_\beta h\right)(t) = t^{-\beta}\int_0^t s^{\beta-1}h(s)ds \ , \beta \in \mathbb{R} \qquad (2.14)$$

**مبرهنة مساعدة 2.14 (متراجحة من نوع هاردي في الفضاء RIS ):** إذا تحقق الشرط $\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \le C$ فإن مؤثر هاردي $H: X \hookrightarrow Y$ محدوداً، أي:

$$||Hh||_Y \le C'||h||_X \qquad (2.15)$$

**البرهان:** نختبر العلاقة (2.15) على دالة القيمة المميزة ثم نستخدم تعريف الدالة الأساسية في العلاقة (2.3) .

**ملاحظة 2.15 (العلاقة مع مؤثرات الكمون من نوع ريز):**بدمج المبرهنتين المساعدتين 2.10 و 2.14 يتبين أن المؤثر $I_\alpha: X \hookrightarrow Y$ محدود. وتكافئ محدودية مؤثر من نوع هاردي ذي وزن مناسب . أي أن مسألة طمر الكمون تختزل إلى متراجحات تكاملية أحادية البعد كما في الشكل (2.15) ، وبذلك يمكن تحليل طمر الكمون المعقدة باستخدام أدوات هاردي الكلاسيكية.

**3. النتائج الرئيسية حول الطمر من نوع الكمون في الفضاء RIS**

يتناول هذا القسم المبرهنات الأساسية للطمر الخاصة بالمؤثرات من نوع الكمون التي تعمل بين فضاءات باناخ اللامتغيرة ومعاد ترتيبها. جميع النتائج المساعدة اللازمة لإثبات هذه المبرهنات تم تطويرها في القسم الثاني، وخاصة متراجحة الترتيب (2.11) وتقديرات التكامل من نوع هاردي (2.15). (Cianchi and Pick, 2020; Haroske and Skrzypczak, 2019)

فيما يلي نستخدم الرمزين $\varphi_X$ و $\varphi_Y$ للدالتين الأساسيتين المرتبطتين بالفضائين $X$ و $Y$ على الترتيب.

**المبرهنة 3.1 (معيار الطمر المستمر):**

لتكن $X, Y$ فضائين باناخ من نوع RIS على $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن $0 < \alpha < n$ .

يكون الطمر

$$H^{\alpha,X}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow Y(\mathbb{R}^n) \qquad (3.1)$$

مستمراً إذا وفقط إذا وجد ثابت $C > 0$ بحيث:

$$\varphi_Y(t) \le C\, t^{\frac{\alpha}{n}}\, \varphi_X(t)\ for\ all\ t > 0 \quad (3.2)$$

وعندئذٍ يمكن تحديد الثابت الأمثل للطمر بالعلاقة:

$$C_{opt} = sup_{t>0}\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \qquad (3.3)$$

**البرهان: (لزوم الشرط):** بفرض أن الطمر $H^{\alpha,X} \to Y$ أي أنه يوجد ثابت $C > 0$ يحقق:

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_{H^{\alpha,X}} \quad \forall f \in H^{\alpha,X} \quad (3.4)$$

ولنأخذ المجموعة $E \subset \mathbb{R}^n$ بحيث $|E| = t$ ولنعرف $g = \chi_E, f = I_\alpha g$ ، ومن علاقة الترتيب (2.11) نحصل على:

$$f^*(s) \leq C_1 \left[ s^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^s g^*(u)du + \int_s^\infty u^{-\frac{\alpha}{n}-1} g^*(u)du \right] \quad (3.5)$$

وبما أن $g^* = \chi_{0,t}$ نحصل على:

$$f^*(s) \leq \{ C_1 t^{\frac{\alpha}{n}}, s > t; \ C_1 s^{-\frac{\alpha}{n}} t, s \leq t. \} \quad (3.6)$$

أي أن $f^*(t) \leq C_2 t^{\frac{\alpha}{n}}$. وباستخدام تعريف الدالة الأساسية $\varphi_Y$ ، نجد:

$$\|f\|_Y \approx f^*(t)\varphi_Y(t) \leq C_3 t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_Y(t) \quad (3.7)$$

ومن جهة أخرى $\|f\|_{H^{\alpha,X}} = \varphi_X(t)$ و $\varphi_Y(t) \leq C_4 t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)$, ومنه نحصل على الشرط (3.2).

**(كفاية الشرط):** نفترض تحقق الشرط (3.2) ولنأخذ $f = I_\alpha g$ حيث $g \in X$ ، ومن المبرهنة المساعدة 2.13 والعلاقة (2.15) نحصل على:

$$f^*(t) \leq C_5 \left[ t^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^t g^*(s)ds + \int_t^\infty s^{-\frac{\alpha}{n}-1} g^*(s)ds \right] \quad (3.8)$$

وباستخدام خاصة عدم التغيير المعاد ترتيبها وهاردي – ليتليود نحصل على:

$$\|f\|_Y \leq C_6 sup_{t>0} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} \|g\|_X \quad (3.9)$$

وباختيار $g$ بحيث يحقق الحد الأدنى في (3.1) نحصل على:

$$\|f\|_Y \leq C_{opt} \|f\|_{H^{\alpha,X}},$$

وبالتالي مستمر. □

**المبرهنة 3.2 (معيار الطمر المضغوط)**

ليكن $X, Y$ فضائين باناخ من نوع RIS على $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن $0 < \alpha < n$ ، يكون الطمر:

$$H^{\alpha,X} \hookrightarrow Y$$

مضغوطاً (Compact) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} = 0 \quad , \qquad lim_{t \to \infty} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} = 0 \quad (3.10)$$

وعندئذٍ يقاس مقياس الانضغاط بالعلاقة :

$$\omega_{H^{\alpha,X} \to Y}(\varepsilon) \approx sup_{t<\varepsilon} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} \quad (3.11)$$

**البرهان: (لزوم الشرط):** بفرض أن الطمر $H^{\alpha,X} \to Y$ مضغوطاً ، إذا لم يتحقق الحد الأول في (3.10) فيوجد متتالية $t_k \to 0^+$ بحيث:

$$\frac{\varphi_Y(t_k)}{t_k^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t_k)} \geq c_0 > 0 \quad (3.12)$$

ولنأخذ مجموعات متباينة $E_k$ بحيث $|E_k| = t_k$ ونعرف $g_k = \chi_{E_k}, f_k = I_\alpha g_k$ . ومن المبرهنة المساعدة (2.11) نحصل على:

$$f_k^*(s) \le C_1 \left[ s^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^s g_k^*(u)du + \int_s^\infty u^{-\frac{\alpha}{n}-1} g_k^*(u)du \right] \quad (3.13)$$

وبما أن $g_k^* = \chi_{0,t_k}$ ، نستنتج:

$$f_k^*(s) \le C_2 t_k^{\frac{\alpha}{n}}$$

ومن ثم:

$$\|f_k\|_Y \approx f_k^*(t_k)\varphi_Y(t_k) \ge c_1 t_k^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_Y(t_k) \qquad (3.14)$$

وفي نفس الوقت لدينا $\|f_k\|_{H^{\alpha,X}} = \varphi_X(t_k)$ وهذا يناقض خاصة الانضغاط، إذ كان يفترض أن $|f_k|_Y \to 0$ على المجموعات المتناقصة $E_k$ . إذن يجب أن تتحقق نهاية (3.10) عند الصفر.

وبشكل مماثل، إذا لم تتحقق النهاية عند اللانهاية، أي يوجد متتالية جزئية $t_k \to 0$ بحيث تبقى النسبة في (3.10) محدودة من الأسفل بثابت موجب، فيمكن بناء متتالية جزئية $f_k$ أخرى من الدوال تخرق شرط الأنضغاط. وفي النتيجة لابد من تحقق كلا الحدين في (3.10).

**(كفاية الشرط):** بفرض تحقق الشرطين في (3.10) . ولتكن $(f_j) \subset H^{\alpha,X}$ متتالية جزئية بحيث $\|f_j\|_{H^{\alpha,X}} \le 1$ و $f_j = I_\alpha g_j, g_j \in X$ . ولنبين أن هذه المتتالية $(f_j)$ مضوطة في $Y$.

من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد$R > 0$ بحيث

$$\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} < \varepsilon \quad \forall \; t > R \qquad (3.15)$$

ومن متراجحة هاردي (2.15) نحصل على:

$$\left\| f_j \chi_{|x|>R} \right\|_Y \le C_3 \varepsilon \qquad (3.16)$$

أي أن الكتلة خارج الكرة الكبيرة صغيرة بقدر مانريد.

**الأستمرارية الموضعية:** من أجل كل $\delta > 0$ يوجد $t_0 > 0$ بحيث:

$$\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}} \varphi_X(t)} < \delta \quad \forall \; t < t_0 \qquad (3.17)$$

وبحسب العلاقة (2.15) نحصل على:

$$\left\| f_j \chi_{|x|<t_0} \right\|_Y \le C_5 \delta \qquad (3.18)$$

وبالتالي القيم القريبة من الصفر صغيرة بقدر مانريد أيضاً.

وبالتالي، فإن المتتالية $\{f_j\}$ ضيقة ومتساوية الاستمرارية. وبحسب معيار الأنضغاط المعروف في كتاب (Bennett and Sharpley, 1988) فإن هذه الخاصيتين تكفيان لضمان وجود متتالية متقاربة في $Y$.

إذن يكون الطمر مدمجاً. □

**المبرهنة 3.3 (التقدير الكمي للثابت الأمثل)**

ليكن $X, Y$ فضائين باناخ من نوع RIS على $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن $0 < \alpha < n$ ، وأن الطمر:

$$H^{\alpha,X} \hookrightarrow Y$$

مستمر. عندئذٍ توجد ثوابت $C_1, C_2 > 0$ بحيث:

$$C_1 sup_{t>0} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \leq C_{opt} \leq C_2 sup_{t>0} \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \qquad (3.19)$$

وإذا تحقق التقريب $\varphi_Y(t) \approx t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t) \ \ \forall \ t > 0$ فإن:

$$C_{opt} \approx 1 \qquad (3.20)$$

**البرهان: 1. (الطرف الأيسر):** لنأخذ المجموعة $E \subset \mathbb{R}^n$ بحيث $|E| = t$ ونعرف $g = \chi_E, f = I_\alpha g$ .

من المبرهنة المساعدة (2.11) نحصل على:

$$f^*(s) \leq C_1 \left[ s^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^s g^*(u)du + \int_s^\infty u^{-\frac{\alpha}{n}-1} g^*(u)du \right] \qquad (3.21)$$

وبما أن $g^* = \chi_{0,t}$ ، نحصل على:

$$f^*(s) \approx \left\{ s^{-\frac{\alpha}{n}} t, s < t;\ t^{\frac{\alpha}{n}}, s > t. \right\} \ (3.22)$$

ومن ثم:

$$\|f\|_Y \approx t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_Y(t), \|f\|_{H^{\alpha,X}} = \varphi_X(t) \qquad (3.23)$$

وبالتالي:

$$\frac{\|f\|_Y}{\|f\|_{H^{\alpha,X}}} \geq c_1 \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \qquad (3.24)$$

وبأخذ الـ supremum على جميع $t > 0$ ، نحصل على:

$$C_{opt} \geq C_1 sup_t \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \qquad (3.25)$$

**2. (الطرف الأيمن):** لنأخذ $f = I_\alpha g, g \in X$ . ومن تقديرات هاردي – ريز (2.15) نحصل على:

$$f^*(t) \leq C_3 t^{-\frac{\alpha}{n}} \int_0^t g^*(s)ds \qquad (3.27)$$

وباستخدام خاصية اللامتغير ومعاد الترتيب نحصل على:

$$\|f\|_Y \leq C_4 sup_t \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \ \|g\|_X \qquad (3.28)$$

وباختيار $g$ بحيث يتحقق الحد الأدنى نحصل على:

$$\|f\|_Y \leq C_4 sup_t \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \ \|f\|_{H^{\alpha,X}} \qquad (3.29)$$

وبالتالي (3.19) محققة.

**3. (الحالة المتكافئة):** إذا كان $\varphi_Y(t) \approx t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)$ من أجل كل $t > 0$ ، ومن ثم $C_{opt} \approx 1$ .

وهذا يعني أن الطمر تقريباً متساوي القياس (Isometric) لايسبب تمديداً أو انضغاطاً في النظيم عند حدود التحجيم.

**مثال 3.4 (حالة لورنتز الكلاسيكية)**

لنأخذ $X = L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ و $Y = L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ بحيث $1 < p_1 < \frac{n}{\alpha}$ و $q_1, q_2 \in [1,\infty]$.

من العلاقة (2.6) للدالة الأساسية في فضاءات لورنتز، لدينا:

$$\varphi_{L^{p,q}}(t) \approx t^{\frac{1}{p}} \qquad (3.30)$$

ومن ثم:

$$\frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \approx t^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}} \qquad (3.31)$$

ولكي يكون الطمر محدوداً (مستمراً)، يجب أن تبقى هذه النسبة محدودة، أي أن الأس في الطرف الأيمن يساوي الصفر، ومن ثم نحصل على الشرط:

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n} \qquad (3.32)$$

في هذه الحالة، يتحقق شرط المبرهنة (3.10) تلقائياً، وبذلك يكون الطمر

$$H^{\alpha,L^{p_1,q_1}} \hookrightarrow L^{p_2,q_2}$$

طمراً مستمراً ومضغوطاً في آن واحد، وهو مايعيد صياغة مبرهنة سوبوليف – لورنتز الكلاسيكية. علاوة على ذلك، يكون الثابت الأمثل في الطمر من الشكل:

$$C_{opt} \approx C(n, \alpha, p_1, q_1, q_2) \qquad (3.33)$$

(Cianchi and Pick, 2020) □

**ملاحظة تحليلية 3.5** تُظهر المبرهنات 3.1–3.3 أن سلوك الطمر يحكمه بدقة النسبة الوظيفية التحليلية التالية:

$$R_{X,Y}(t) = \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} \qquad (3.34)$$

ويمكننا تلخيص الظواهر الثلاث الأساسية للطمر كما يلي:

الأستمرارية $\Leftrightarrow$ $sup_t\, R_{X,Y}(t) < \infty$

الأنضغاط $\Leftrightarrow$ $R_{X,Y}(t) \to 0 \ as\ t \to 0^+, \infty$

Isometry $\Leftrightarrow$ $R_{X,Y}(t) \approx 1$ (3.35)

يوفر هذا الإطار توحيداً عاماً لكل من طمر سوبوليف – لورنتز، وأورلتش – بيسل، وجميع الطمور في الفضاءات اللامتغيرة ومعاد ترتيبها. (Cianchi and Pick, 2020)

## 4. التطبيقات ونتائج الطمر الإضافية في الفضاء RIS

**تعريف4.1 (دالة نسبة الطمر):** ليكن $X, Y$ فضائين باناخ RIS على $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن $0 < \alpha < n$، ونعرف دالة نسبة الطمر بالعلاقة:

$$R_{X,Y}(t) = \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\varphi_X(t)} \ \ , t > 0 \qquad (4.1)$$

وبحسب الصيغة (3.35) يمكن التعبير عن الحالات الثلاث الأساسية للطمر كما يلي:

مستمر $sup_t R_{X,Y}(t) < \infty \ \Leftrightarrow H^{\alpha,X} \hookrightarrow Y$

انضغاط $R_{X,Y}(t) \to 0 \ \Leftrightarrow \ H^{\alpha,X} \hookrightarrow Y$

إيزومتري $R_{X,Y}(t) \approx 1 \ \Leftrightarrow$ (4.2)

وبالتالي فإن $R_{X,Y}$ يعمل كـ ثابت تحليلي كامل يصف جميع أنواع الطمور. (Adams and Hedberg, 1996)

**توطئة 4.2( الطمر من نوع لورنتز)** : لنأخذ $X = L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ، $Y = L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ و $1 < p_1 < \frac{n}{\alpha}$ ، $q_1, q_2 \in [1,\infty]$.

عندئذٍ يكون الطمر $H^{\alpha,L^{p_1,q_1}} \hookrightarrow L^{p_2,q_2}$ مستمراً إذا كان:

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n} \qquad (4.3)$$

ويكون مضغوطاً إذا تحقق الشرط:

$$\frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$$

كما يقدر الثابت الأمثل في هذه الحالة بالعلاقة:

$$C_{opt} \approx sup_t\, t^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}} \qquad (4.4)$$

(Adams and Hedberg, 1996)

**البرهان:** بما أن $\varphi_{L^{p,q}}(t) \approx t^{\frac{1}{p}}$ ومن العلاقة (3.30)، نحصل على:

$$R_{X,Y}(t) \approx t^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}} \qquad (4.5)$$

وبحسب المبرهنة 3.1 يتحقق الطمر المستمر عندما يكون $sup_t\, R_{X,Y} < \infty$ أي عندما يتحقق الشرط(4.4) .

أما إذا كان $R_{X,Y}(t) \to 0$ , $\frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ فيكون مضغوطاً بحسب العلاقة (3.10).

أما العلاقة (4.5) فتتبع مباشرة من التقدير الكمي (3.19). □

**المبرهنة 4.3 (الطمر من نوع أورليتش)** : ليكن $A, B$ دالتين من نوع يونغا تُعرفان فضائي أورلتش $L^A, L^B$ على $\mathbb{R}^n$، $A^{-1}, B^{-1}$ هو المعاكس أحادي الرتابة، عندئذٍ يتحقق الطمر المستمر $H^{\alpha,L^A} \hookrightarrow L^B$ إذا وفقط إذا وجد ثابت $C > 0$ يحقق الشرط الآتي:

$$B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \le C t^{\frac{\alpha}{n}} A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (4.6)$$

ويكون الطمر مضغوطاً إذا وفقط إذا كان:

$$lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{\alpha}{n}} \frac{A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = lim_{t\to\infty}\, t^{-\frac{\alpha}{n}} \frac{A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = 0 \qquad (4.7)$$

أما الثابت الأمثل يقدر بالعلاقة:

$$C_{opt} \approx sup_t \frac{t^{-\frac{\alpha}{n}} A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} \qquad (4.8)$$

**البرهان:** بما أن $\varphi_{L^A}(t) \approx \frac{1}{A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$ و $\varphi_{L_B}(t) \approx \frac{1}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$

$$R_{L^A,L^B}(t) \approx \frac{t^{-\frac{\alpha}{n}} A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} \qquad (4.9)$$

ومن ثم، حسب المبرهنة 3.1 ، فإن

$$sup_t\, R_{L^A,L^B} < \infty \Leftrightarrow \text{مستمر} \qquad (4.10)$$

انضغاط $\Leftrightarrow R_{L^A,L^B} \to 0$ وفق المبرهنة 3.2 والعلاقة (3.10).

وأخيراً، يتبع التقدير (4.8) مباشرة من الصيغة العامة (3.19). (Musielak, 1983; Maligranda,1989) □

**النتيجة 4.4 (الانتقال بين طمر لورنتز وأورلتش):** عند أختيار $A(s) = s^{p_1}, B(s) = s^{p_2}$ ومن العلاقة (4.6) نحصل على:

$$t^{-\frac{1}{p_2}} \leq Ct^{\frac{\alpha}{n}}t^{-\frac{1}{p_1}}, i.e. \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$$

وهكذا تعيد المبرهنة 4.3 صياغة التوطئة 4.2 الخاص بحالة لورنتز.

**المبرهنة 4.5 (الطمر من نوع بيسل – ريز ):** ليكن $X = L^p, Y = L^q$ فضائين باناخ من نوع RIS ولتكن $0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}$.

نعرف مؤثر بيسل – ريز $J_\alpha$ من أجل كل $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ بالعلاقة:

$$H^{\alpha,L^p} = \{ f : J_\alpha * f \in L_p \} \quad (4.11)$$

عندئذٍ يكون الطمر $H^{\alpha,L^p} \hookrightarrow L^q$ مستمراً إذا كان:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \qquad (4.12)$$

ويكون الطمر مضغوطاً إذا كان $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ و

$$C_{opt}(J_\alpha : L^p \hookrightarrow L^q) \approx sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}} \qquad (4.13)$$

**البرهان:** بشكل مباشر من $\varphi_{L^p}(t) \approx t^{\frac{1}{p}}$ والعلاقة (4.1). □

**توطئة 4.6(طمر من نوع لورنتز – أورلتش):** ليكن $X = L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ، $Y = L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ ونفرض $0 < \alpha < n$، عندئذٍ يكون الطمر $H^{\alpha,L^{p_1,q_1}} \hookrightarrow L_B$ مستمراً إذا كان:

$$B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \leq Ct^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p1}} \qquad (4.14)$$

ويكون الطمر مضغوطاً عندما $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$.

والثابت الأمثل يعطى:

$$C_{opt}(L^{p_1,q_1} \to L^{p_2,q_2}) \approx sup_{t>0}\left[\frac{1}{t^{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{p_1}. B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}\right] \qquad (4.15)$$

**البرهان:** من المبرهنة 3.1 تعطي شرط الاستمرارية للطمر $H^{\alpha,X} \hookrightarrow Y$

أي

$$\varphi_Y(t) \leq ct^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t) , \varphi_{L^B}(t) \approx \frac{1}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$$

ومنه

$$\varphi_{L^{p_1,q_1}}(t) = t^{\frac{1}{p_1}}$$

وشرط الانضغاط من النظرية 3.2

$$R_{X,Y}(t) = \frac{\varphi_Y(t)}{t^{\frac{\alpha}{n}}\varphi_X(t)} = \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{p_1}.B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$$

والتقدير الكمي للثابت من النظرية 3.3 نحصل على (4.15) . □

**نتيجة 4.7(الطمر من نوع أورلتش – لورنتز):** $X = L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ ، $Y = L^A(\mathbb{R}^n)$ حيث $A$ دالة يونغا و $0 < \alpha < n$ عندئذٍ يكون الطمر

$$H^{\alpha,L_A} \hookrightarrow L^{p_2,q_2}$$

مستمراَ إذا وجد ثابت $c$ يحقق:

$$A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \geq c\, t^{\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha}{n}} \qquad (4.16)$$

هنا الأنضغاط محقق دوماً .

أما الثابت الأمثل الموحد فهو :

من أجل كل زوج $X, Y$ من الفضاءات RIS :

$$C_{opt} \approx sup_{t>0} \frac{\varphi_Y(t)}{\left[t^{\frac{\alpha}{n}}\, \varphi_X(t)\right]} \qquad (4.17)$$

وبشكل خاص:

$$C_{opt}(L^{p_1,q_1} \hookrightarrow L^{p_2,q_2}) \approx sup_t\, t^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}},$$
$$C_{opt}(L^A \hookrightarrow L^B) \approx sup_t\, t^{-\frac{\alpha}{n}} \frac{A^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)},$$
$$C_{opt}(J_\alpha: L^p \hookrightarrow L^q) \approx sup_t\, t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}}$$

تمثل هذه الصيغ الشكل الكلاسيكي لمبرهنة سوبوليف في حالة الفضاءات $L^p \hookrightarrow L^q$ . ومنه العلاقة (4.17) هي تعميم للمبرهنة(3.1)، وهذا التقدير يشمل جميع فضاءات RIS.

## 5. النتائج والتوصيات

يمكن تلخيص النتائج الاساسية لهذا البحث كما يلي:

- تطوير إطار تحليلي موحد للطمر حيث تم تقديم صياغة عامة للطمر من نوع الكمون في فضاءات باناخ اللامتغيرة والمعاد ترتيبها RIS ، مما يسمح بتوحيد الكثير من النتائج ضمن إطار واحد
- إدخال دالة نسبة الطمر كأداة مركزية (الاستمرارية والانضغاط والحالة الإيزومترية) وهذا يتوافق مع الاتجاهات الحديثة في تحليل الطمر الأمثل
- تم إثبات أن استمرارية الطمر وانضغاطه يمكن توصيفها بدقة باستخدام سلوك الدالة $R_{X,Y}(t)$ مما يوفر معيار فعال وقابل للتطبيق في فضاءات عامة.
- تم اشتقاق صيغة دقيقة للثابت الأمثل $C_{opt} \approx sup_{t>0} R_{X,Y}(t)$ .

وبناءً على النتائج السابقة ، نوصي بمايلي:

- تطبيق الإطار التحليلي لدراسة المؤثرات الغير خطية، وخاصة في المعادلات التفاضلية غير الخطية.
- دراسة الطمر في الفضاءات ذات الأبعاد المتغيرة وبشكل خاص الفضاءات ذات الأبعاد الكسرية.
- دراسة أدق للثوابت المثلى وخصوصاً في الحالات الحدية.

## References


[1] ADAMS, D. R., & HEDBERG, L. I. **Function Spaces and Potential Theory**. Springer, 1996.

[2] BENNETT, C., & SHARPLEY, R. **Interpolation of Operators**. Academic Press, 1988

[3] CIANCHI, A. and PICK, L., *"Optimal Sobolev embeddings and rearrangement-invariant spaces,"* *J. Math. Pures Appl.*, **140** 2020, 75–99.

[4] EDMUNDS, D.E. and EVANS, W.D. **Spectral Theory and Differential Operators**, Oxford Univ. Press, 1987.

[5] HARDY, G.H, LITTGEWOOD, J.E, and POLYA. G, *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1952.

[6] MALIGRANDA. L, **Orlicz Spaces and Interpolation**, Dept. of Mathematics, Univ. of Umeå, 1989.

[7] MUSIELAK J, **Orlicz Spaces and Modular Spaces**, Springer, Berlin, 1983.

[8] CRUZ-URIBE D.V. and FIORENZA A, **Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Applications**, Birkhäuser, Basel, 2018.

[9] HARSOSKE. T and SKRZYPCZAK. L, "*Characterisations of compactness for embeddings of function spaces,*" *Rev. Mat. Complut. **32** 2019, 301–339.

[10] RAKOTOSON. M and TEMAM R," *J. Funct. Anal. **285** 2023, 110015.