

دراسة البلاطات المركبة المتعددة الطبقات ضمن المجال اللاخطي باختلاف السماكة والشروط الطرفية وباستخدام عنصر منتهي معدل

د. سليمان أبو دياب *

أ.د. بسام حويجة **

ابراهيم حسن ***

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٥/١١/٢٣ . قبل للنشر في ٢٠٢٦/٢/٣)

□ ملخص □

تتناول هذه الدراسة بعض الأمثلة العملية للبلاطات المركبة المتعددة الطبقات بسماكات وشروط طرفية مختلفة ضمن المجال اللاخطي الهندسي. تستخدم طريقة عناصر منتهية معدلة مبنية على الشكل التزايدى لمبدأ الانتقالات الوهمية بحيث يتم اتباع منهج تكراري تزايدى ضمن خطوات الحل يؤدي إلى تحويل المسألة اللاخطية إلى سلسلة من المسائل الخطية في خطوات صغيرة متعاقبة. وقد طُور لهذا الغرض عنصر منتهي معدل يستخدم توابع تقريبية مشابهة لتلك المستخدمة في العنصر المنتهي المعروف ACM ويضاف إلى الجزء المتجانس جزء آخر غير متجانس لمعالجة حالة تحميل العنصر بحيث تكون التوابع التقريبية بمجملها محققة للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة على مستوى العنصر المنتهي. وقد أُطرت هذه الخوارزميات في كود برمجي ضمن بيئة الماتلاب ودُرست على أساسه بعض الأمثلة للبلاطات المركبة المتعددة الطبقات ذات سماكات وشروط طرفية مختلفة. فُورنت النتائج مع أدبيات علمية معروفة وتبين أن هناك تقارب كبير مع ما توصلت إليه هذه الأدبيات وسرعة في الحصول على قيم السهم.

الكلمات المفتاحية : بلاطات مركبة متعددة الطبقات، تحليل لا خطي، طريقة عناصر منتهية معدلة.

* أستاذ مساعد، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة اللاذقية، اللاذقية، سوريا.

** أستاذ، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة اللاذقية، اللاذقية، سوريا

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) ، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة اللاذقية، اللاذقية، سوريا.

Studying Multilayered Composite Plates with Different Thicknesses and Boundary Conditions in Nonlinear Domain Using modified Finite Element

Prof. Sulaiman Abo Diab *

Prof. Bassam Hwaija **

Ibraheem Hssn ***

(Received 23/11/2025 . Accepted 3/2/2026)

□ ABSTRACT □

In this Article, we study some practical examples of multilayered composite plates with various thicknesses and different boundary conditions in the geometrical nonlinear domain. We use a modified finite element method based on incremental form of the virtual displacement principle in which we apply an incremental iterative approach through small steps to convert the nonlinear problem into a series of linear consecutive small steps. For this purpose a modified finite element has been developed, this element uses approximate functions similar to those used in the well-known finite element ACM and in addition to the homogeneous part we implement a new nonhomogeneous part to take into considerations loading case on the element so the approximate functions fulfill the nonhomogeneous differential equation at the finite element level. These algorithms were framed in a code using MATLAB programming language, and some examples of multilayered composite plates with different thicknesses and boundary conditions were studied. The results were compared with well-known scientific literature, Numerical results showed great convergence with those provided in literature and a speed in obtaining deflection.

Keywords : Finite element, Multilayered composite plates, Nonlinear analysis, Modified FEM.

* Associate Professor, Department of Structural Engineering, Faculty of civil engineering, Lattakia University, Lattakia, Syria.

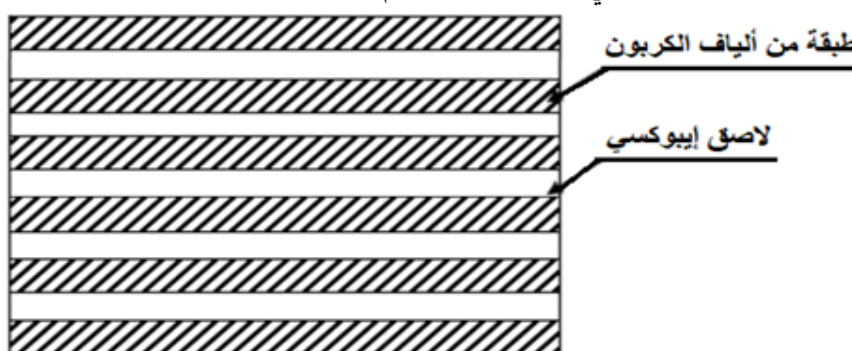
** Professor, Department of Structural Engineering, Faculty of civil engineering, Lattakia University, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student (PhD), Department of Structural Engineering, Faculty of civil engineering, Lattakia University, Lattakia, Syria.

مقدمة :

تعتبر البلاطات المركبة المتعددة الطبقات (Multilayered composite plates) من المواد الإنشائية المستخدمة في العديد من التطبيقات الهندسية والعلمية. تكون على شكل عدة طبقات متوضعة فوق بعضها البعض من مادة واحدة أو من مواد مختلفة مما يعطي هذا النوع من البلاطات خصائص فريدة لا تتوفر في البلاطات المكونة من مادة واحدة. قد تكون المواد المكونة لكل طبقة مواد معدنية أو سيراميكية أو بوليميرات أو غيرها وقد تكون الطبقة الواحدة خليط من عدة مواد حيث يعتمد اختيار المواد على الخصائص المطلوب توافرها في البلاطة.

يوضح الشكل (١) بلاطة مركبة متعددة الطبقات كل طبقة منها مكونة من ألياف الكربون وهذه الطبقات مترابطة مع بعضها بواسطة لاصق إيبوكسي يؤمن التلاصق التام لهذه الطبقات بحيث تعمل كبلاطة واحدة.



الشكل (١). عينة في بلاطة مركبة متعددة الطبقات مشكلة من ألياف الكربون

عادةً ما يتم إجراء التحليل الهندسي اللاخطي عبر تطبيق منهج تكراري يتم فيه زيادة الحمولة المطبقة على العنصر ضمن خطوات صغيرة مع حساب إحداثيات العقد وقيم الإجهادات الداخلية المتشكلة للوصول إلى حالة التوازن الجديدة المشوهة. نتيجة لذلك يتطلب إجراء هذا التحليل استخدام طرق عددية فعالة وموثوقة تأتي في مقدمتها طريقة العناصر المنتهية التي استخدمت وبشكل واسع في التحليل اللاخطي للمنشآت ذات الشكل الهندسي المنحني أو المركبة من عدة طبقات.

تاريخياً توجد الكثير من الأبحاث و الدراسات التي تناولت السلوك اللاخطي الهندسي للبلاطات مما يجعل إمكانية ذكرها جميعاً أمراً صعباً للغاية. لكن يمكن الرجوع لمراجع يانغ وشركائه [1] والذي قام بمراجعة تاريخية شبة شاملة للعناصر المنتهية التي استخدمت في تحليل البلاطات خلال العشرين سنة الماضية. كما يشتمل المرجعين [2,3] على عدد من الأبحاث التي تناولت بالتفصيل السلوك اللاخطي الهندسي للبلاطات المركبة المتعددة الطبقات. أيضاً نجد أن من أهم الأبحاث التي درست البلاطات المركبة وتحليلها ضمن السلوك الخطي المراجع [4,5,6] وتحليل سلوكها عند الانهيار [7,8,9]. في العديد من الأبحاث السابقة [10,11,12,13,14] كان استخدام العنصر المنتهي الرباعي العقد حيث بكل عقدة ٥ درجات حرية هي ثلاث انتقالات ودورانين هو السائد. لكن كافة الدراسات السابقة لم تتطرق لدراسة تأثير شكل الحمولة المطبقة على العنصر المنتهي على بناء تابع الانتقال الخاص به. أخيراً يمكن العودة إلى بعض المراجع الحديثة لمعاينة ما تم التوصل إليه بخصوص البلاطات المركبة المتعددة الطبقات و على سبيل المثال لا الحصر [15,16,17,18,19,20].

يتضمن نموذج الانتقالات الذي سنعتمده في هذه المقالة تابع انتقال تقريبي من جزأين الأول جزء متجانس والثاني جزء خاص (غير متجانس). كما أن البارامترات (الحدود) المعبرة عن هذا التابع تم اختيارها بحيث تحقق بدقة المعادلة التفاضلية لبلاطة كيرشوف. نتيجة لذلك تنقسم توابع الشكل إلى قسمين، جزء متجانس يتعلق بدرجات حرية العنصر وجزء جديد غير متجانس يعتمد على شكل الحمولة المطبقة على العنصر المنتهي.

سيتم في هذه الدراسة استعراض طريقة تابع الانتقال كما سيتم استخراج مصفوفات الصلابة وشعاع القوى المكافئ الخارجي والحد الجديد الناتج عن تطبيق العنصر المنتهي المعدل بالتفصيل. كما سيتم الاستفادة من المنهج التكراري التريادي لمبدأ الانتقالات الافتراضية بهدف تحليل بعض أمثلة البلاطات ذات السماكات والشروط الطرفية المختلفة.

أهمية البحث وأهدافه :

تستخدم البلاطات المركبة المتعددة الطبقات في نطاق واسع من التطبيقات، بما في ذلك الفضاء الجوي (لبناء الطائرات والمركبات الفضائية)، وصناعة السيارات (لأجزاء هيكل السيارات)، والهندسة المدنية (للبناء وتشبيد الجسور)، والإلكترونيات (لصناعة السيارات ولوحات الدوائر المطبوعة). يمكن أن يكون تحليل البلاطات المركبة المتعددة الطبقات معقدًا بسبب الخصائص المختلفة للطبقات. ويمكن استخدام طرق مختلفة لهذا الغرض بما في ذلك تحليل العناصر المنتهية والذي يمكن من نمذجة سلوك البلاطات تحت تأثير ظروف تحميل مختلفة.

أكد العديد من الباحثين على أن فهم السلوك الفعلي للبلاطات المركبة المتعددة الطبقات يتطلب إجراء تحليل لاخطي. لذلك سنتناول هذه الدراسة التأثيرات الهندسية اللاخطية على البلاطات المركبة المتعددة الطبقات، ويمكن تلخيص أهداف البحث في النقاط التالية :

- استخراج مصفوفات الصلابة الخطية والهندسية و شعاع القوى الخارجية إضافة إلى الحد الجديد الناتج من تطبيق العنصر المنتهي المعدل وفق مبدأ الانتقالات الافتراضية.
- تحليل بعض الأمثلة للبلاطات المركبة المتعددة الطبقات باستخدام برنامج معد بلغة الماتلاب البرمجية و مقارنة النتائج التي تم التوصل إليها مع نتائج باحثين درسوا هذه البلاطات باستخدام طريقة العناصر المنتهية.
- دراسة تأثير اختلاف سماكة البلاطة والشروط الطرفية على قيم السهم في مركزها.

طرائق البحث ومواده :

سيتم في هذا البحث الاستفادة من البيئة البرمجية لبرنامج الماتلاب (MATLAB) بهدف تطوير كود برمجي لدراسة وتحليل البلاطات المركبة المتعددة الطبقات وحساب قيم السهوم والقوى الداخلية المتشكلة نتيجة السلوك اللاخطي الهندسي لهذه البلاطات. حيث سيتم دراسة عدد من الأمثلة العددية واستخلاص النتائج المختلفة لمعايرة سلوك هذه البلاطات وخصوصاً عند اختلاف قيمة السماكة و الشروط الطرفية كونها عامل حاسم في التصميم لهذا النوع من البلاطات.

العنصر المنتهي المعدل :

في طريقة العناصر المنتهية المعدلة من المفترض أن تحقق توابع الشكل المعادلة التفاضلية للبلاطة بشكل دقيق ولكن لصعوبة إيجاد حلول دقيقة لمعادلة فون كارمان التي تعبر عن السلوك الهندسي اللاخطي للبلاطات وبما أننا ندرس السلوك اللاخطي كسلسلة من الخطوات الخطية الصغيرة سوف نستخدم توابع الشكل للعنصر الرباعي النظامي ضمن شبكة الإحداثيات الطبيعية والمكون من ٤ عقد بحيث يمثل الجزء المتجانس من توابع الشكل.

$$N_1(\theta^1, \theta^2) = (1/4)(1 - \theta^1)(1 - \theta^2) ; N_2(\theta^1, \theta^2) = (1/4)(1 + \theta^1)(1 - \theta^2) \quad (1)$$

$$N_3(\theta^1, \theta^2) = (1/4)(1 + \theta^1)(1 + \theta^2) ; N_4(\theta^1, \theta^2) = (1/4)(1 - \theta^1)(1 + \theta^2) \quad (2)$$

بالنسبة للجزء غير المتجانس سنعمد تابع الانتقال للعنصر الرباعي المستطيل ACM والذي هو كثير حدود مع زيادتها لتصبح خمسة عشر حداً بدلاً من اثني عشر ثم نطبق طرفي المعادلة التفاضلية التي تحكم سلوك البلاطات في الحالة الخطية. وقد تم شرح هذه الخطوات بالتفصيل في المراجع [21,22,23,24,25].

الصيغة النهائية لتابع الانتقال ستكون كما يلي:

$$w_i = N_i^{m(e)} \cdot u_{m(e)} + \bar{N}_{ij} \cdot \bar{p}^j \quad (3)$$

$N_i^{m(e)}$: الجزء المتجانس من توابع الشكل، $u_{m(e)}$: درجات الحرية في العقد.

\bar{N}_{ij} : الجزء غير المتجانس من توابع الشكل والموضح بالتفصيل في المرجع [٢١].

\bar{p}^j : شدة الحمولة الموزعة بانتظام على عقد العنصر المنتهي.

تطبيق طريقة العناصر المنتهية على البلاطات المركبة المتعددة الطبقات :

من خلال تطبيق الشكل التزايدى لمبدأ الانتقالات الوهمية واتخاذ كاساس متغيراتي لتطبيق طريقة

العناصر المنتهية نموذج الانتقالات، يمكننا اعتبار المتغير الأول للطاقة الكلية مساوي للصفر:

$$\delta \Delta \pi = 0 \quad (4)$$

باستخدام المنهج التزايدى للانتقال من حالة توازن معينة إلى حالة غير معروفة (وضعية قبل التشوه إلى

وضعية متشوهه مجهولة)، يتم استبدال الانتقالات u_i^0 بانتقالات جديدة u_i وتنتقل البلاطة إلى الموضع الجديد،

ونعبر عن انتقالات البلاطة في الموضع الجديد \tilde{u}_i :

$$\tilde{u}_i = u_i^0 + u_i \quad (5)$$

u_i : زيادة صغيرة في الانتقالات بحيث يمكن اعتبار سلوك البلاطة ضمنها سلوك خطي.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij} ; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

$\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$: مصفوفات الإجهاد والتشوه على التوالي.

$\Delta \varepsilon_{ij}, \Delta \sigma_{ij}$: تمثل تزايدات صغيرة في الإجهاد والتشوه على التوالي والناجئة عن التزايد الصغير

الحاصل في الانتقال.

استناداً لمبدأ الانتقالات الوهمية فإنه يمكننا التعبير عن متغير الطاقة الكلية بالعلاقة التالية:

$$\delta \pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \tilde{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (7)$$

من خلال تطبيق سلسلة من الخطوات التكرارية بحيث تكون قيمة الزيادة في الانتقال صغيرة إلى درجة

يمكن معها اعتبار السلوك ضمن كل خطوة هو سلوك خطي تصبح العلاقة السابقة:

$$\int_V \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) c^{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 dV + \int_V \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) c^{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dV - \int_V \tilde{f}_i \delta(\Delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i \delta(\Delta u_i) dS = 0 \quad (8)$$

بتحويل التكامل على الحجم الكلي للبلاطة إلى تكامل على سطحها عبر التجميع على كل طبقة من طبقات البلاطة المركبة المتعددة الطبقات (المكاملة على سماكة البلاطة) وتعويض توابع الشكل المتجانسة وغير المتجانسة نحصل على العلاقات اللازمة لاستخراج مصفوفات الصلابة وشعاع القوى الخارجية المكافئة على العقد والحد الجديد الناتج عن تابع الشكل غير المتجانس للعنصر المعدل.

$$[K_T] \cdot \delta \bar{w} = R_1 + R_2 \quad ; \quad [K_E + K_S + K_G] = [K_T] \quad (9)$$

K_T : مصفوفة الصلابة المماسية و المعبرة عن السلوك اللاخطي للبلاطة المركبة المتعددة الطبقات.

K_E : مصفوفة الصلابة الخطية الانعطافية للبلاطة المركبة المتعددة الطبقات.

K_S : مصفوفة الصلابة الخطية القصية للبلاطة المركبة المتعددة الطبقات.

K_G : مصفوفة الصلابة المعبرة عن السلوك اللاخطي الهندسي للبلاطة المركبة المتعددة الطبقات.

R_1 : شعاع القوى الخارجية المكافئ والمطبق على عقد العنصر المنتهي المعدل.

R_2 : الحد الجديد الناتج عن العنصر المنتهي المعدل والذي يمثل الاختلاف بين طريقة العناصر

المنتهية التقليدية والطريقة المعدلة المستخدمة في هذا البحث.

مصفوفة الصلابة الخطية الغشائية K_{Em}

$$K_{Em} = \int_A (B_m)^T \cdot Q_m \cdot B_m \cdot dA \quad (10)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Q_m = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot (z_{k+1} - z_k) \quad (12)$$

بالانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الطبيعية وتطبيق التكامل العددي كونه يساهم بشكل كبير في

سرعة الحصول على النتائج يصبح لدينا:

$$K_{Em} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_m)^T \cdot Q_m \cdot B_m \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (13)$$

J : مصفوفة الجاكوبيان للتحويل بين جمل الإحداثيات.

مصفوفة الصلابة الخطية الانعطافية K_{Eb}

$$K_{Eb} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_b)^T \cdot Q_b \cdot B_b \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (14)$$

مصفوفة الصلابة الخطية القصية K_S

$$K_S = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_s)^T \cdot Q_s \cdot B_s \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (15)$$

الشكل الجزء المتجانس. (Q_m, Q_b, Q_s) : مصفوفة ثوابت المرونة لطبقات البلاطة.
 المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ (x,y) على التوالي وذلك لتتابع

مصفوفة الصلابة الهندسية K_G

$$K_G = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (G)^T . S . G . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 \quad (16)$$

G : المشتقات الجزئية لتتابع الشكل الجزء المتجانس من المرتبة الأولى بالنسبة إلى (x,y) على التوالي.

S : مصفوفة الإجهادات الأولية ويتم تجميعها لكافة الطبقات.

شعاع القوى الخارجية المكافئ R_1

$$R_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (N)^T . q . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 \quad (17)$$

N : تتابع الشكل الجزء المتجانس.

q : شدة الحمولة الخارجية المؤثرة على البلاطة.

الحد الجديد الناتج عن العنصر المنتهي المعدل R_2

$$R_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_m)^T . Q_m . \bar{B}_m . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_b)^T . Q_b . \bar{B}_b . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 \\ + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_s)^T . Q_s . \bar{B}_s . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 \\ + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (G)^T . S . \bar{G} . \det J . d\theta^1 . d\theta^2 \quad (18)$$

الشكل الجزء غير المتجانس. $(\bar{B}_m, \bar{B}_b, \bar{B}_s, \bar{G})$: المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ (x,y) على التوالي وذلك لتتابع

الأمثلة العددية و المناقشة :

في كافة الأمثلة المدروسة اعتمدت سماكة الطبقات ضمن البلاطة الواحدة متساوية، وعامل تصحيح القص (٥/٦). تم اعتماد طريقة نيوتن رافسون في تطبيق التكرارات وتقسيم الحمولة إلى ٢٠ خطوة تتزايد بدءاً من الصفر حتى القيمة النهائية. تم اعتماد مقدار التقارب (الدقة) مساوي إلى (٠,٠١).

المثال الأول : بلاطة مربعة متناظرة و متمفصلة من أطرافها الأربعة

سيتم في هذا المثال دراسة ثلاث حالات بحيث تكون نسبة طول البلاطة إلى سماكتها (L/t) مساوية إلى ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ على التوالي. البلاطة مؤلفة من أربع طبقات مرتبة بالاتجاهات $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$

وعوامل المادة تحقق العلاقات التالية : $(\frac{E_1}{E_2} = 25 ; \frac{G_{12}}{E_2} = 0.5 ; \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 ; G_{12} = G_{13})$

عوامل المرونة باتجاه x : $(E_1 = 25 \times 10^6 Psi = 17.237 \times 10^4 MPa)$

باتجاه y : $(E_2 = 10^6 Psi = 0.6895 \times 10^4 MPa)$

عوامل القص : $(G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6 Psi = 0.3447 \times 10^4 MPa)$

والعامل الثالث : $(G_{23} = 0.2 \times 10^6 Psi = 0.138 \times 10^4 MPa)$

عامل بواسون : $(\nu_{12} = \nu_{21} = 0.25)$

والبلاطة خاضعة لحمولة موزعة بانتظام شدتها الكلية : $q = 2Psi = 1.38 \times 10^{-2}MPa$
 تم حساب السهم اللابعدى (w/t) في مركز البلاطة المربعة وفق الكود المعد بلغة الماتلاب والنتائج عن
 العنصر المنتهى المعدل وذلك للحالات الثلاثة ($L/t=10, 20, 40$) على التوالي. ولراحة القارئ نورد النتائج
 التي توصل إليها باحثون آخرون مثل زهانغ وكيم [١٩] وكذلك الحل التحليلي الوارد في المرجع [٤] وهي
 موضحة في الجداول (١) و (٢) و (٣) .

الجدول (١) : قيم السهم اللابعدى في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة ($L/t = 10$)

الحمولة اللابعدية $\frac{q \cdot L^4}{E_2 \cdot t^4}$	السهم اللابعدى في مركز البلاطة ($L/t = 10$)		
	الحل التحليلي	زهانغ و كيم	العنصر المعدل
50	0.356	0.3631	0.3592
100	0.51	0.5141	0.5122
150	0.61	0.6158	0.6137
200	0.689	0.6949	0.6905
250	0.747	0.7605	0.7581

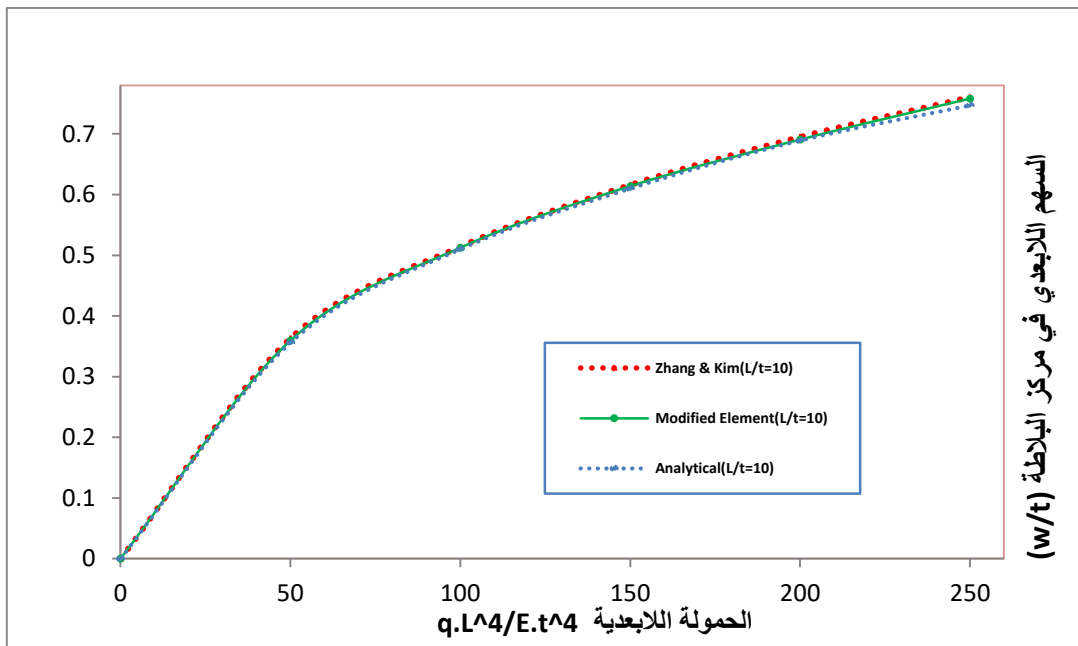
الجدول (٢) : قيم السهم اللابعدى في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة ($L/t = 20$)

الحمولة اللابعدية $\frac{q \cdot L^4}{E_2 \cdot t^4}$	السهم اللابعدى في مركز البلاطة ($L/t = 20$)		
	الحل التحليلي	زهانغ و كيم	العنصر المعدل
50	0.32	0.3229	0.3211
100	0.486	0.4868	0.4865
150	0.592	0.5971	0.595
200	0.68	0.6817	0.6805
250	0.752	0.7514	0.7518

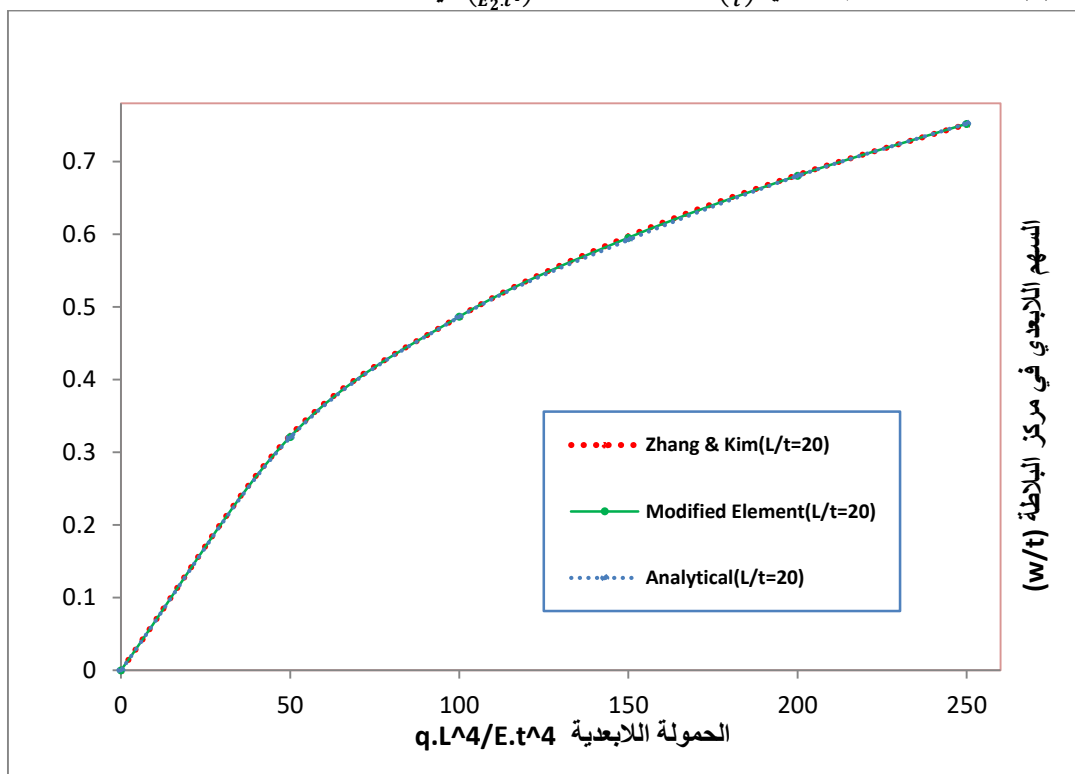
الجدول (٣) : قيم السهم اللابعدى في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة ($L/t = 40$)

الحمولة اللابعدية $\frac{q \cdot L^4}{E_2 \cdot t^4}$	السهم اللابعدى في مركز البلاطة ($L/t = 40$)		
	الحل التحليلي	زهانغ و كيم	العنصر المعدل
50	0.293	0.2913	0.2922
100	0.464	0.4608	0.4631
150	0.582	0.5771	0.5802
200	0.664	0.6668	0.6653
250	0.738	0.7403	0.7391

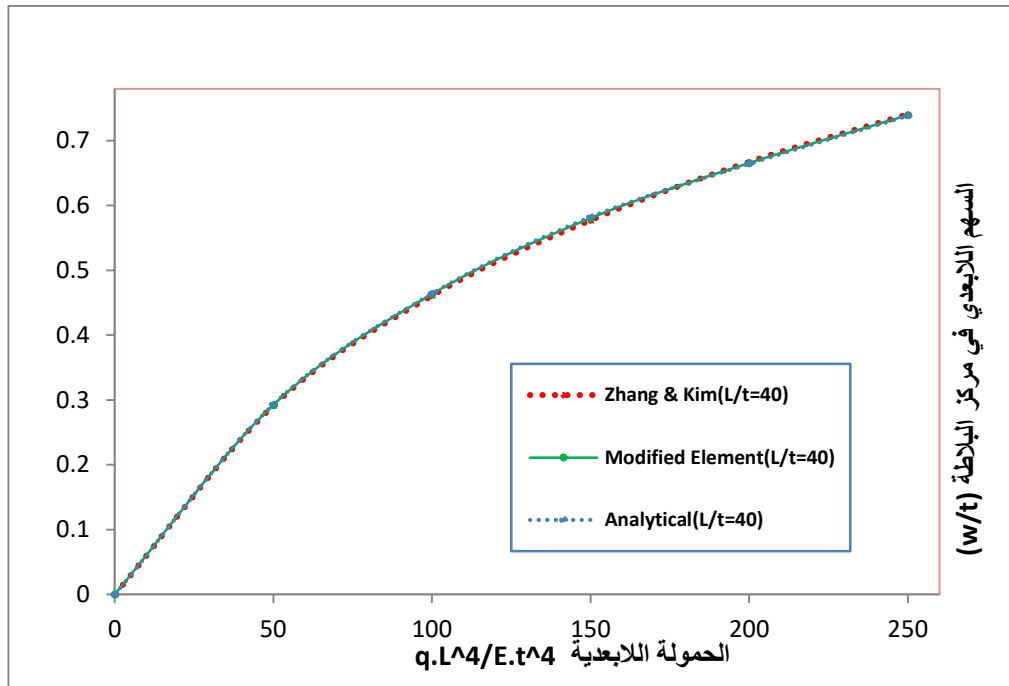
كما تم رسم المخطط اللابعدى لتزايد السهم (w/t) مع تزايد الحمولة $\left(\frac{q \cdot L^4}{E_2 \cdot t^4}\right)$ للبلاطة المتمفصلة
 للنسب الثلاث ($L/t=10, 20, 40$) وهي موضحة وفق الأشكال (٢) و (٣) و (٤) على التوالي .



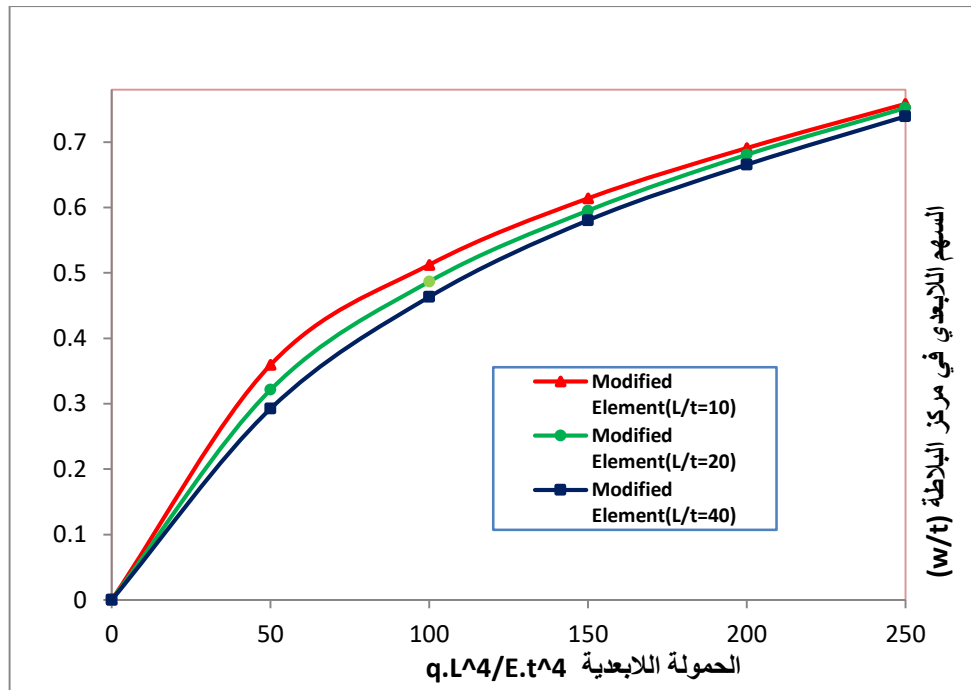
الشكل (٢) : العلاقة بين السهم اللابعدي $\left(\frac{w}{t}\right)$ و الحمولة اللابعدية $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة $(L/t = 10)$



الشكل (٣) : العلاقة بين السهم اللابعدي $\left(\frac{w}{t}\right)$ و الحمولة اللابعدية $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة $(L/t = 20)$



الشكل (٤) : العلاقة بين السهم اللابعدى $\left(\frac{w}{t}\right)$ و الحمولة اللابعدية $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ في مركز البلاطة المتمفصلة ذات النسبة $(L/t = 40)$ أيضاً تم مقارنة المخطط اللابعدى لتزايد السهم (w/t) مع تزايد الحمولة $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ للبلاطة المتمفصلة للنسب الثلاث $(L/t=10, 20, 40)$ وفق الحل المقترح في هذه المقالة (العنصر المعدل) كما يوضح الشكل (٥) .



الشكل (٥) : مقارنة اختلاف منحنى السهم اللابعدى $\left(\frac{w}{t}\right)$ و الحمولة اللابعدية $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ في مركز البلاطة المتمفصلة للنسب الثلاث $(L/t = 10, 20, 40)$

بينت المخططات السابقة أن العنصر المعدل المقترح أعطى تقارباً كبيراً من الحل التحليلي وحقق تقارباً أكبر من النتائج التي توصل إليها الباحثان زهانغ و كيم.

المثال الثاني : بلاطة مربعة ذات شروط طرفية متغيرة

سندرس في هذا المثال بلاطة مربعة وفق حالتين بحيث تكون في الحالة الأولى البلاطة موثوقة من أطرافها الأربعة وفي الحالة الثانية مستندة استناد بسيط (متمفصلة) من أطرافها الأربعة، و في كلا الحالتين أبعاد ومادة البلاطة هي واحدة حيث أن أبعادها في المسقط الأفقي (L=12in=30.48cm) وسماكتها (t=0.096in=0.24384cm) ومؤلفة من أربع طبقات مرتبة بالاتجاهات $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ، خواص المادة ضمن كل طبقة كالتالي : عامل بواسون : $(\nu_{12} = \nu_{21} = 0.23949)$

عوامل المرونة باتجاه x : $(E_1 = 1.8282 \times 10^6 Psi = 1.2605 \times 10^4 MPa)$

باتجاه y : $(E_2 = 1.8315 \times 10^6 Psi = 1.2628 \times 10^4 MPa)$

عوامل القص : $(G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.125 \times 10^5 Psi = 2.1546 \times 10^3 MPa)$

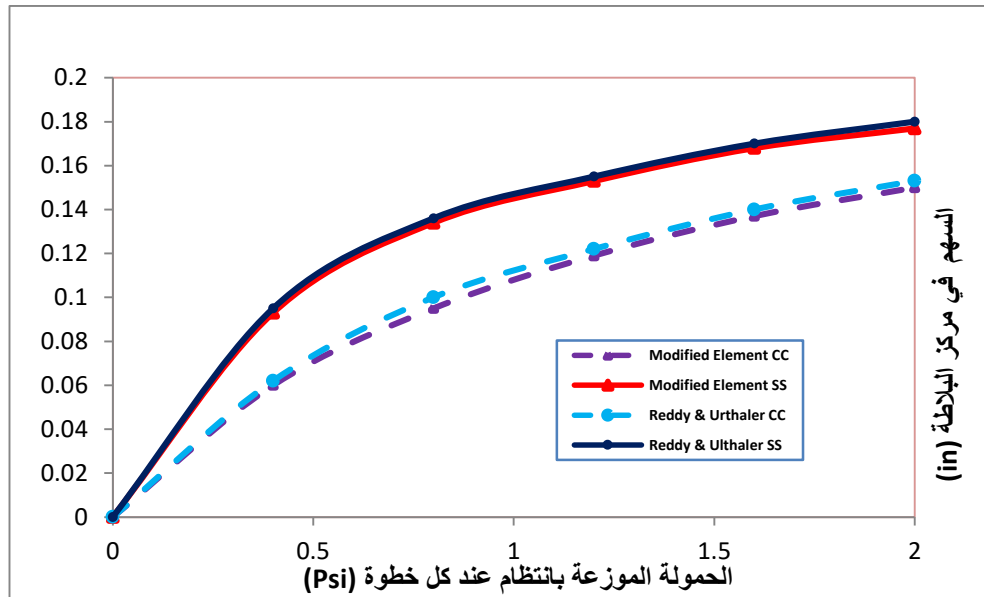
والبلاطة خاضعة لحمولة موزعة بانتظام شدتها الكلية : $q = 2 Psi = 1.38 \times 10^{-2} MPa$

تم حساب السهم في مركز البلاطة المربعة وفق العنصر المنتهي المعدل المقترح في هذه الدراسة استناداً للحالتين الأولى البلاطة موثوقة والثانية البلاطة متمفصلة، ولراحة القارئ نورد النتائج التي توصل إليها الباحثان ريدي و آرثر الذين قاموا بدراسة المثال أيضاً [٢٠] وهي موضحة في الجدول (٤).

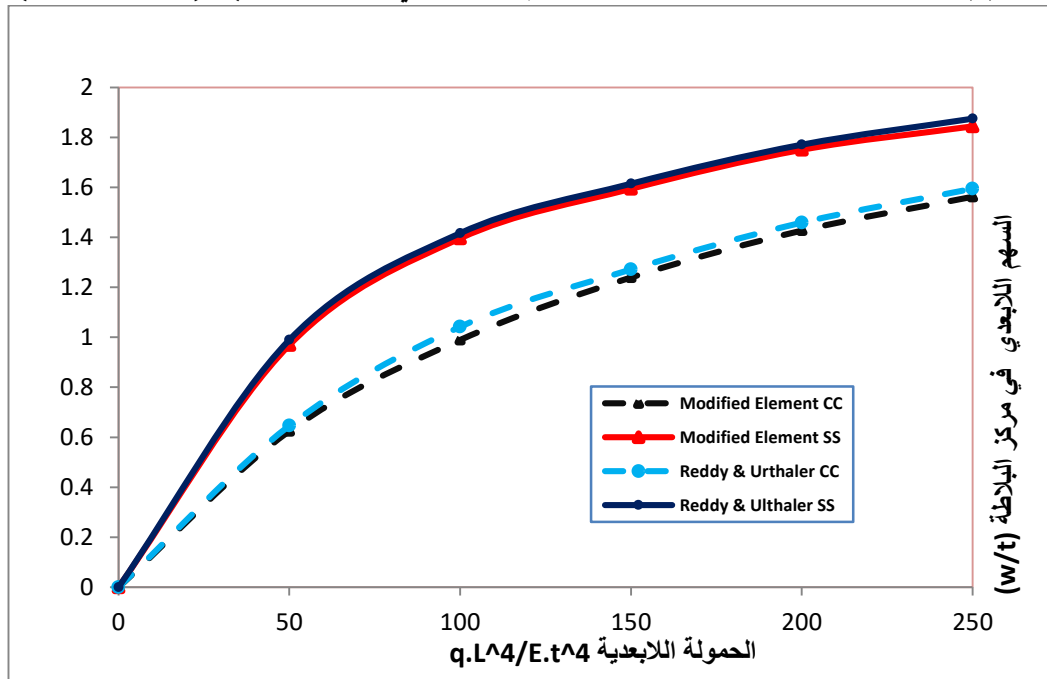
الجدول (٤) : قيم السهم في مركز البلاطة المربعة وفق الحالتين الاستناد الموثوق والمتمفصل

q Psi (MPa)	السهم في البلاطة ذات الاستناد الموثوق in (mm)		السهم في البلاطة ذات الاستناد المتمفصل in (mm)	
	ريدي و آرثر	العنصر المعدل	ريدي و آرثر	العنصر المعدل
0.4 (0.28x10 ⁻²)	0.062 (1.575)	0.06 (1.524)	0.095 (2.413)	0.093 (2.362)
0.8 (0.55x10 ⁻²)	0.1 (2.54)	0.095 (2.413)	0.136 (3.454)	0.134 (3.404)
1.2 (0.83x10 ⁻²)	0.122 (3.1)	0.119 (3.023)	0.155 (3.937)	0.153 (3.886)
1.6 (1.1x10 ⁻²)	0.14 (3.556)	0.137 (3.48)	0.17 (4.318)	0.168 (4.267)
2.0 (1.38x10 ⁻²)	0.153 (3.886)	0.15 (3.81)	0.18 (4.572)	0.177 (4.496)

كما تم رسم مخطط تزايد السهم في مركز البلاطة مع تزايد الحمولة في كل خطوة الشكل (٦) و كذلك المخطط اللابعدى لتزايد السهم (w/t) مع تزايد الحمولة $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$ الشكل (٧) كونه يوضح الاختلافات بشكل أكبر.



الشكل (٦) : تأثير اختلاف الشروط الطرفية على مخطط السهم - الحمولة في مركز البلاطة المربعة ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)



الشكل (٧) : تأثير اختلاف الشروط الطرفية على مخطط السهم اللابدي ($\frac{w}{t}$) - الحمولة اللابدية ($\frac{q.L^4}{E_2.t^4}$) في مركز البلاطة المربعة ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

إن النتائج التي حصلنا عليها (السهم في مركز البلاطة) عند استخدام العنصر المنتهي المعدل المقترح هنا على توافق كبير مع النتائج التي حصل عليها الباحثون الآخرون.

الاستنتاجات و التوصيات :

- العنصر المعدل المقترح أعطى تقارباً كبيراً من الحل التحليلي وسرعة في الوصول إلى النتائج (زمن تحليل قليل ولا حاجة لنعومة كبيرة لشبكة العناصر المنتهية) وهذا بالرغم من كونه غير معقد من حيث الصياغة الرياضية وبسيط بالنسبة للعناصر الأخرى المقترحة.

• أعطى العنصر المعدل المقترح قيمة دقيقة للسهم في مركز البلاطة حتى مع اختلاف نسبة طول البلاطة إلى سماكتها مما يبين إمكانية استخدامه لبلاطات بسماكات مختلفة تتراوح بين بلاطات قليلة السماكة إلى متوسطة السماكة.

• بينت المخططات السابقة أن الاستجابة اللاخطية للبلاطة الموثوقة أقل منها في حالة البلاطة المتمفصلة مما يشير إلى أن زيادة تقييد درجات الحرية على أطراف البلاطة أدى إلى زيادة صلابتها والتي بدورها أدت إلى انخفاض الاستجابة اللاخطية.

References :

- 1- Yang, H. T. Y., Saigal, S., Masud, A. and Kapania, R. K. *A survey of recent shell element*, Int J Numer Methods Eng 2000;47(1-3):101-27.
- 2- Gal, E. and Levy, R. *Geometrically nonlinear analysis of shell structures using a flat triangular shell finite element*, Arch Comput Methods Eng 2006;13(3):331-88.
- 3- Zhang, Y. X. and Yang, C. H. *Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates*, Compos Struct 2009;88(1):147-57.
- 4- Kant, T. and Kommineni J. R. *C 0 finite element geometrically nonlinear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory*, Comput Struct, Vol (45) 1992, 511-20.
- 5- Thai, C. H., Nguyen-Xuan, H., Nguyen-Thanh, N., Le, T. H., Nguyen-Thoi, T. and Rabczuk, T. *Static free vibration and buckling analysis of laminated composite Reissner– Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach*, Int J Numer Methods Eng 2012;91(6):571-603.
- 6- Zhuang, X., Huang, R., Zhu, H., Askes, H. and Mathisen, K. *A new and simple locking free triangular thick plate element using independent shear degrees of freedom*, Finite Elem Anal Des 2013;75:1-7.
- 7- Rabczuk, T., Gracie, R., Song, J. H. and Belytschko, T. *Immersed particle method for fluid–structure interaction*, Int J Numer Methods Eng 2010;81(1):48-71.
- 8- Rabczuk, T., Areias, P. M. A. and Be, T. *A meshfree thin shell method for nonlinear dynamic fracture*, Int J Numer Methods Eng 2007;72(5):524-48.
- 9- Rabczuk, T. and Areias, P. M. A. *A meshfree thin shell for arbitrary evolving cracks based on an external enrichment*, CMES: Comput Model Eng Sci 2006;16(2):115-30.
- 10- Phan-Dao, H., Nguyen-Xuan, H., Thai-Hoang, C., Nguyen-Thoi, T., Rabczuk, T. *An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates*, Int J Comput Methods 2013;10(1) [art. no. 13400057].
- 11- Reddy, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells-theory and analysis*, CRC Press; 2004.
- 12- Zhang, Y. X. and Kim, K. S. *Linear and geometrically nonlinear analysis of plates and shells by a new refined non-conforming triangular plate/shell element*, Comput Mech 2005;36:331-42.
- 13- Upadhyay, A. K. and Shukla, K. K. *Large deformation flexural behavior of laminated composite skew plates: an analytical approach*, Compos Struct 2012;94:3722-35.

- 14- Sze, K. Y., Liu, X. H. and Lomboy, S. H. *Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells*, Finite Elem Anal Des 2004;40:1551–69.
- 15- Gabbasov , R., Filatov, V. and Dao, N. K. *Numerical Research of Bending Flexible Plates*, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 661 012006, 2019.
- 16- Uvarova, N. and Turbinov, A. *A numerical method for calculating round slabs based on generalized equations of the finite difference method*, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 869 052050, 2020.
- 17- Poojary, J. and Rajamohan, V. *Nonlinear free vibration analysis of internal thickness-tapered multi-layered composite rectangular plates undergoing moderately large deflections*, Journal of Sound and Vibration, Volume 572, 2024.
- 18- Verma, S., Thakur, B. R., Singh, B.N. and Maiti, D.K. *Geometrically nonlinear flexural analysis of multilayered composite plate using polynomial and non-polynomial shear deformation theories*, Aerospace Science and Technology, Volume 112, 2021.
- 19- Zhang, Y. X. and Kim, K. S. *Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements*, ELSEVIER, Composite Structures, Vol (72) 2006, 301–310.
- 20- Reddy J. N. and Urthaler, Y. *A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol (15) 2008, 335–354.
- 21- Abo Diab, S. *Generalization of a reduced Trefftz type approach – some numerical results*, sixth U.S. National congress on Computational Mechanics, Dearborn Michigan, USA, 01-04, August 2001, pp.595.
- 22- Abo Diab, S. *Formatting of Quadrilateral Finite element*, Fifth World congress on Computational Mechanics (WCCMV), Vienna, Austria, (Editors: Mang H.A, Rammer stoffer, F.G, Eberhardsteinerm J. publisher Vienna University of Technology ,Austria, ISBN 3-9501554-06; <http://wccm.tuwien.ac.at>, ,July 2002.
- 23- Abo Diab, S. *The natural boundary conditions as a variational basis for finite element methods – quadrilateral plate bending elements*, In CD-ROM: Numerical Methods in Continuum Mechanics 2000 Eds. V. Kompis, M. Zmindak, E. W. A. Maunder, Liptovsky Jan, Slovakia, 2000, Paper No. 083.
- 24- Abo Diab, S. *Quadrilateral folded plate structure elements of reduced Trefftz Type*, CAMES, Vol(10) 2003, 391-406.
- 25- Abo Diab, S. *Finite Element based on Reduced Trefftz Type Concepts*, Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI), Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, <http://www.wccm6-apcom04.org.cn>